

Grau en Matemàtiques

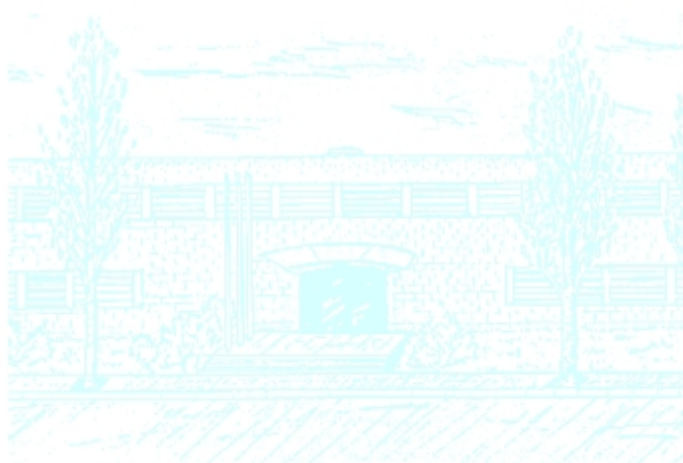
Títol: Escales musicals i fraccions contínues

Autor: Laura Farré Rozada

Director: Xavier Gràcia Sabaté

Departament: Matemàtica Aplicada IV

Convocatòria: 2014 - 2015



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Grau de Matemàtiques

Escales musicals i fraccions contínues

per

Laura Farré Rozada

`maths.vs.music@gmail.com`

Treball de fi de grau

supervisat per

Xavier Gràcia Sabaté

Departament de Matemàtica Aplicada IV

octubre del 2015

Resum

Paraules clau: escales musicals, fraccions contínues, octava, xenharmonia, teorema dels tres passos.

MSC2010: 00A65, 11A55, 11J70.

Aquest treball té com a objectiu formalitzar matemàticament els mètodes de construcció d'escales musicals, mitjançant la utilització de les fraccions contínues, i posar de manifest les persistents dificultats que sorgeixen en el procés d'afinació del piano.

Amb aquest propòsit, comencem exposant els fonaments físics i musicals del problema que ens ocupa, tot revisant quins són els principals mètodes de construcció d'escales. A continuació, utilitzem les fraccions contínues per estudiar les escales de divisions iguals de l'octava, les de Wendy Carlos i les de Bohlen-Pierce. Finalment, revisem alguns resultats teòrics més abstractes, com ara el teorema dels tres passos, per tal de poder generalitzar un seguit de propietats de les escales generades per un interval.

Resumen

Palabras clave: escalas musicales, fracciones continuas, octava, xenarmonia, teorema de los tres pasos.

MSC2010: 00A65, 11A55, 11J70.

Este trabajo tiene como objetivo formalizar matemáticamente los métodos de construcción de las escalas musicales, mediante la utilización de fracciones continuas, y poner en relieve las persistentes dificultades que surgen en el proceso de afinación del piano.

Con este propósito, empezamos exponiendo los fundamentos físicos y musicales del problema mencionado, revisando cuáles son los principales métodos de construcción de escalas. A continuación, utilizamos las fracciones continuas para estudiar las escalas de división igual de la octava, las de Wendy Carlos y las de Bohlen-Pierce. Y para terminar, revisamos algunos resultados teóricos más abstractos como el teorema de los tres pasos, que nos permitirá generalizar una serie de propiedades de las escalas generadas para un intervalo.

Abstract

Keywords: musical scales, continued fractions, octave, xenharmonic, three gaps theorem.

MSC2010: 00A65, 11A55, 11J70.

This bachelor thesis aims to formalise, in mathematical terms, different methods to build musical scales, along with the usage of continued fractions, and to highlight several persistent issues related to the piano tuning system.

With this goal in mind, we start exposing the physical and musical principles of our problem, while examining the main methods of scale construction. Afterwards, we use continued fractions in order to study equal divisions of the octave, Wendy Carlos' and Bohlen-Pierce's scales. Finally, we check some theoretical results, such as the three gaps theorem, in order to establish general proprieties of generated scales for an interval.

Sumari

1	Introducció	1
1.1	Música i matemàtiques: una història en paral·lel	1
1.2	Construint escales musicals amb fraccions contínues	1
1.3	Objectius	2
1.4	Continguts	2
1.5	Recursos utilitzats	3
2	Intervals i escales	5
2.1	El so	5
2.2	Tons i intervals	6
2.2.1	Relació logarítmica	6
2.2.2	Equivalència d'octaves	7
2.2.3	Consonància d'interval·ls	9
2.3	Notes i escales	13
2.3.1	Construcció d'escales	14
2.4	Exemples d'escales	14
2.4.1	L'escala pitagòrica	14
2.4.2	Les escales justes	16
2.4.3	Els temperaments mesotònics	17
2.4.4	Els temperaments irregulars	17
2.4.5	L'escala 12-dio	18
2.5	Comparativa de les escales	19
3	Escales i fraccions contínues	21
3.1	Escales amb divisions iguals de l'octava	22
3.1.1	Aproximació de la quinta justa	22
3.1.2	Aproximació de la quinta mesotònica	23

3.1.3	Aproximació de la tercera major mesotònica	26
3.2	Escala amb divisions iguals d'altres intervals	27
3.2.1	Les escales de Wendy Carlos	27
3.2.2	Les escales de Bohlen-Pierce	33
3.3	Comparativa de les escales de fraccions contínues	35
4	El teorema dels tres passos	37
4.1	El teorema dels tres passos	37
4.2	El teorema dels tres passos aplicat a les escales generades	42
4.2.1	L'escala pitagòrica	42
4.2.2	L'escala generada a partir de la quinta mesotònica	44
	Conclusions	47
	A Fraccions contínues	49
	B Escales de fraccions contínues	55
B.1	Escala de divisions iguals de l'octava	55
B.2	Escala de Wendy Carlos i de Bohlen-Pierce	61
	C Escales generades per un interval	65
C.1	Escala generades per la quinta justa	65
C.2	Escala generades per la quinta mesotònica	68
	Bibliografia	73

Capítol 1

Introducció

1.1 Música i matemàtiques: una història en paral·lel

Sovint sentim a parlar de les múltiples connexions entre les matemàtiques i la música, però més rarament arribem a concretar en quins àmbits i de quina manera aquestes dues disciplines conflueixen. La llegenda diu que a l'antiga Grècia, el cèlebre Pitàgores de Samos va ser el primer en estudiar i relacionar les raons enteres amb la construcció de les escales musicals. Tanmateix, nombrosos estudis apunten que ja es disposava d'aquest coneixement a l'antiga Babilònia, més de mil anys abans [24, p. 94-95].

Una història igual de difuminada és la de les fraccions contínues, les quals fa més de dos mil anys que s'estudien, tot i que no és fins a la darrerïa del segle XVII que comencen a formalitzar-se, gràcies a l'ús que en fa Rafael Bombelli per a expressar l'arrel quadrada de 13. Gràcies a aquest descobriment, es va obrir un ventall de possibilitats per a les fraccions contínues, establint un precedent del que ha esdevingut, actualment, el seu ús més recurrent: l'aproximació de nombres reals mitjançant fraccions racionals [2].

1.2 Construint escales musicals amb fraccions contínues

Aquesta facilitat per aproximar nombres reals, ens ha permès establir un vincle entre les fraccions contínues i les escales musicals a l'hora d'abordar un problema persistent: l'afinació del piano.

Durant segles, teòrics de la música han intentat minimitzar l'error que sorgeix al fixar les notes de tot el registre de l'instrument en funció d'unes determinades proporcions. No obstant, cap dels models proposats ha servit per resoldre completament el problema. Això és degut a que la correcta afinació del piano depèn de l'existència d'una solució no trivial d'una equació, aparentment inofensiva:

$$2^x = 3^y, \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Com que és impossible trobar un parell d'enters $(x, y) \neq (0, 0)$ que satisfaci la igualtat

anterior, o l'expressió equivalent $\frac{x}{y} = \log_2(3)$, optarem per aproximar una solució irracional amb fraccions contínues. En termes musicals, aquest és el problema de tancar el cicle de quintes.

1.3 Objectius

El principal objectiu d'aquest treball és estudiar els mètodes més freqüents de construcció d'escals musicals mitjançant la utilització de les fraccions contínues, i posar de manifest les dificultats del problema plantejat. Aquest procés ens permetrà plasmar amb més detall quins vincles s'estableixen entre la música i les matemàtiques en aquest camp, i la importància d'aquestes últimes per solucionar un problema encara obert i vigent en la praxi musical.

En segon terme, la present monografia també pretén formalitzar matemàticament els conceptes musicals utilitzats —especialment, en el procés de construcció de les escales— i, d'altra banda, assimilar els resultats teòrics que ens proporciona el teorema dels tres passos, el qual també ens permetrà generalitzar les propietats d'algunes de les escales estudiades i afegir paràmetres a considerar en el nostre estudi.

1.4 Continguts

En termes generals, el treball s'estructura en tres grans blocs, un per cada capítol. Vegem-ne amb més detall els respectius continguts.

Capítol 2: Intervals i escales

Aquest primer bloc pretén ser una primera incursió en la utilització de les matemàtiques en la teoria de les escales musicals, i la justificació de l'aplicació de les fraccions contínues.

Comencem establint els fonaments físics i musicals del problema que estudiarem, tot introduint el formalisme matemàtic utilitzat en el transcurs del treball. Seguidament, presentem els principals mètodes de construcció d'escals musicals: la generació a partir d'un interval —i.e. escales generades— i la divisió igual de l'octava —dio. A continuació, treballem amb exemples concrets de cada mètode, alternatives dissenyades per solucionar els problemes que se'n deriven, i els avantatges principals de cada opció.

Principalment, estudiarem amb detall les escales pitagòrica, justa i 12-dio, i els temperaments mesotònics i irregulars.

Capítol 3: Escales i fraccions contínues

Un cop feta la primera presa de contacte, aprofundirem en la construcció de les escales basades en els resultats teòrics de fraccions contínues que exposem a l'**Apèndix A**. Per fer-ho, dividirem el nostre estudi en dues parts: les escales basades en l'interval d'octava amb divisions iguals de l'octava i algunes escales xenharmòniques.

En el primer apartat, estudiarem les principals escales que podem obtenir a partir d'aproximar la quinta justa i la quinta mesotònica. Per tal d'ampliar els resultats obtinguts, proposem una nova escala –28–dio– que sorgeix de l'aproximació de la tercera major mesotònica. Un cop construïdes totes les escales, prosseguirem a comparar-les, amb la finalitat de valorar, en cada cas, quina és més resolutiva. Concretament, estudiarem les escales 19–dio, 28–dio, 31–dio, 41–dio i 53–dio. Com que l'escala 12–dio ja l'hauem estudiat al capítol anterior, no la tractarem en aquest apartat.

En la segona part, seguirem un mètode similar amb algunes escales xenharmòniques, tot estudiant els casos concrets de les escales α, β i γ de Wendy Carlos, i les escales justa i de 13 divisions iguals de la tritava de Bohlen-Pierce. Finalment, compararem totes les escales estudiades en el transcurs del capítol per esbrinar quina d'elles és més adequada a l'hora d'afinar un determinat interval.

Per tal de poder visualitzar les dades amb què hem treballat i complementar els resultats d'aquest capítol, hem adjuntat l'**Apèndix B**, on es poden consultar, amb detall, totes les escales estudiades, els càlculs de les quals hem realitzat en la seva integritat.

Capítol 4: El teorema dels tres passos

En aquest darrer bloc investiguem propietats més genèriques de les escales generades per un interval. El capítol es fonamenta en l'enunciació i demostració del teorema dels tres passos i, a continuació, d'altres teoremes més específics que se'n deriven, i que també fan ús de les fraccions contínues.

Tot seguit relacionem aquests resultats amb les escales estudiades en els capítols anteriors. Concretament, els apliquem a l'escala pitagòrica i l'escala generada a partir de la quinta mesotònica. Aquesta última també ha sigut fruit de la voluntat d'experimentar amb la creació d'una escala, que tot i no utilitzar-se, pot resultar interessant com a objecte d'estudi.

Tal i com ja havíem fet en el capítol anterior, també adjuntem totes les dades que hem calculat i utilitzat en l'estudi particular de les escales en l'**Apèndix C**.

1.5 Recursos utilitzats

Pel que fa la bibliografia consultada, un dels llibres que ens ha proporcionat més continuïtat en la temàtica del treball ha sigut el *Music: A Mathematical Offering* del

Dave Benson, ja que ofereix una primera visió global i general de l'objecte d'estudi. Tanmateix, per tal d'obtenir una base més sòlida en la teoria de les fraccions contínues, hem optat per basar-nos en els resultats teòrics que proporciona Manfred R. Schroeder en el seu *Number Theory in Science and Communication* i el llibre *An Introduction to the Theory of Numbers* dels autors Godfrey H. Hardy i Edward M. Wright.

Degut a que la temàtica que tractem en el tercer capítol és més específica, ens ha sigut de gran utilitat consultar directament els articles dels autors que han donat nom a algunes de les escales estudiades, com és el cas de les escales de Wendy Carlos —de qui val la pena destacar l'article *Tuning: At the Crossroads*—, i les de Bohlen-Pierce. D'aquestes últimes, a part de basar-nos en l'article original de Heinz Bohlen, *13 Tonstufen in der Duodezime*, també ens ha sigut de gran utilitat consultar els materials disponibles a la pàgina web de la seva fundació, ja que inclou manuscrits anteriors i posteriors a l'article, que permeten entendre millor els passos que va seguir l'autor al dissenyar l'escala que porta el seu nom.

Finalment, un dels articles més bàsics per aquest treball —i molt especialment per al quart capítol— ha sigut *Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales: Escalas bien formadas* de Marco Castrillón i Manuel Domínguez, en el qual s'enuncia i es demostra el teorema dels tres passos i altres resultats interessants relacionats.

Capítol 2

Intervals i escales

2.1 El so

La paraula **so** s'utilitza per descriure dues coses diferents: d'una banda, el fenomen físic que es produeix quan les vibracions elàstiques d'un cos es propaguen a través d'un medi en forma d'ones i incideixen mecànicament en l'òrgan de l'oïda; i de l'altra, la sensació auditiva i la percepció que efectua el nostre cervell a partir d'aquest estímul mecànic.

Per entendre millor la connotació física del so, hem de tenir present que l'**ona sonora** es propaga longitudinalment mitjançant un canvi de pressió i densitat de l'aire, el qual eventualment retornarà al seu estat inicial un cop finalitzat el procés. Per tant, les ones transmeten energia però no matèria.

Essencialment, podem sintetitzar qualsevol so com una combinació de sons purs o **parcials** que anomenarem **so complex**. La pressió acústica de cada **so pur** es descriu mitjançant una funció periòdica en el temps de la forma $p(t) = A \sin(2\pi ft)$, on A és l'**amplitud** i f la **frequència** mesurada en Hz. Entenem per **pressió acústica** la desviació de pressió que exerceix l'ona sonora respecte la pressió ambient.

Totes les freqüències que configuren un so complex originen l'**espectre**, el qual serà **harmònic** si es forma a partir d'una freqüència fonamental f i els seus múltiples enters $f_k = kf$ amb $k = 1, 2, 3, \dots$, o **inharmònic** quan no es compleixi aquesta propietat. Anomenarem **k -èsim harmònic** a la component amb freqüència kf .

L'amplitud és un atribut físic del so que es correspon a la **intensitat**, la propietat perceptiva que es mesura en dB per quantificar el nivell de sensació sonora. En altres paraules, el volum.

D'altra banda, la freqüència d'un so també té un anàleg perceptiu: l'**altura**. Aquesta ens permet situar un so en una escala ordenada de greu a agut, de manera que si la seva freqüència és elevada direm que el so és **agut** i, en cas contrari, **greu**.

A més a més, un so també es caracteritza pel seu **timbre**, és a dir, la sensació auditiva

que permet distingir dos sons d'igual intensitat i altura. Aquesta característica és conseqüència directa de la configuració de l'espectre. Finalment, una última propietat perceptiva important del so és la **durada**, és a dir, la prolongació del so en el temps.

L'evolució d'aquesta prolongació es pot sintetitzar en quatre fases: l'**atac**, el **decaïment**, el **sosteniment** i l'**extinció**.

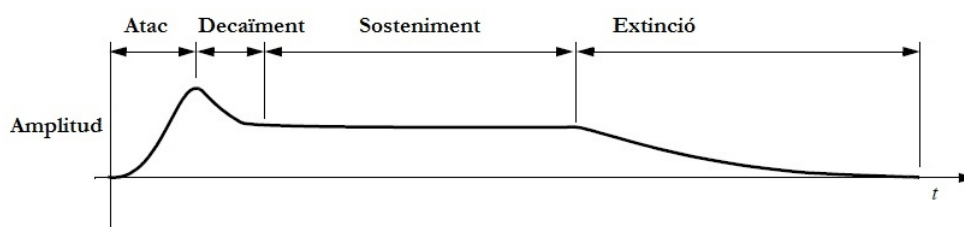


Figura 2.1: Gràfica de l'evolució de l'amplitud del so en el temps

2.2 Tons i intervals

Podem definir un **to** com un so periòdic pur o complex que es caracteritza per una determinada altura, intensitat i timbre. Tanmateix, quan estudiem el to en un context musical aquest l'anomenem **nota**. És important tenir en compte que la paraula nota pot tenir tres significats diferents:

- Un tipus de so que, en virtut de la seva altura, forma part d'una escala.
- Un to amb una determinada durada dins el context d'una obra musical.
- Un signe de la notació musical utilitzat per representar una nota en algun dels sentits anteriors.

En el transcurs d'aquest treball només utilitzarem el terme **nota** en el primer dels sentits, és a dir, només considerarem el paràmetre de l'altura, i anomenarem **interval** a la diferència entre l'altura de dos tons. La percepció de l'altura satisfà dues propietats fonamentals: la **relació logarítmica** i l'**equivalència d'octaves**.

2.2.1 Relació logarítmica

L'interval de dos tons només depèn de la raó de les seves freqüències, que anomenarem **raó freqüencial**. Per tant, donats dos tons de freqüències f_1, f_2 , podem expressar el seu interval com:

$$r = f_2 : f_1$$

Exemple 2.1. Siguin els tons t_1, t_2 amb freqüències 260 i 390 Hz, respectivament, la raó freqüencial d'aquests és $390 : 260 = 3 : 2$. Tanmateix, si considerem els tons

t_3, t_4 amb freqüències 440 i 660 Hz, respectivament, la seva raó freqüencial també és $660 : 440 = 3 : 2$ i, per tant, defineixen el mateix interval. Aquesta equivalència es deu a la **relació logarítmica** entre la freqüència i l'altura: multiplicar raons freqüencials és equivalent a sumar intervals. Això ens permet traduir l'exemple anterior a altures i treballar amb l'escala additiva. Sigui Q l'interval de raó $3 : 2$. Aleshores, es compleix que:

$$t_2 = t_1 + Q$$

$$t_4 = t_3 + Q$$

Així doncs, l'interval resultant de sumar dos tons a l'escala additiva és el mateix que l'obtingut amb la respectiva raó freqüencial a l'escala multiplicativa, tal i com mostra el següent exemple:

Exemple 2.2. Sigui T_1 l'interval de raó $5 : 4$ i sigui T_2 l'interval de raó $6 : 5$. Aleshores, podem sumar intervals de dues maneres diferents:

$$T_1 + T_2 = Q$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$$

Els intervals més importants amb els que treballarem són l'**uníson**, l'**octava** i la **quinta justa**.

2.2.2 Equivalència d'octaves

El principi de l'**equivalència d'octaves** estableix una identitat de percepció musical entre dues notes que es troben a un interval d'octava. Encara que tinguin altures diferents, les dues notes compleixen una funció musical molt similar. Aquesta propietat es pot observar, per exemple, quan un conjunt d'homes i dones canten la mateixa melodia: en realitat, la canten a una octava de distància.

Així doncs, l'equivalència d'octaves estableix una relació d'equivalència. Direm que dues notes són **equivalents** quan la seva raó freqüencial és 2:

$$f_2 : f_1 = 2$$

Això vol dir que $f_1 \sim f_2$ si, i només si, $f_2 = 2^k f_1$ per a cert $k \in \mathbb{Z}$. En particular, l'interval entre f_1 i f_2 per $k = 1$ és el d'**octava**. En canvi, quan $k = 0$ tindrem que $f_2 = f_1$ i, per tant, direm que l'interval entre ambdues notes és l'**uníson**.

Mesura d'intervals

Fins ara hem vist que l'octava és, juntament amb l'uníson, l'interval fonamental. Per tant, no és d'estranyar que la puguem prendre com a unitat per a mesurar intervals.

Sigui r la raó freqüencial de l'interval entre dues notes. Podem mesurar el nombre d'octaves d'aquest segons l'expressió:

$$x = \log_2 r$$

Ja que si f_1, f_2 són les respectives freqüències tal que $r = f_2 : f_1$, pel principi de l'equivalència d'octaves tenim que $f_2 = 2^x \cdot f_1$. Per tant, la raó d'un interval de x octaves serà:

$$r = 2^x$$

Si ara dividim l'octava en 12 parts iguals i prenem la mesura de qualsevol d'aquestes parts com a unitat, obtindrem el **semitò temperat**. Això és:

$$1 \text{ semitò temperat} = \frac{1}{12} \text{ octava}$$

Segons aquesta construcció, la raó freqüencial r del semitò temperat compleix que:

$$r^{12} = \frac{2}{1} \iff r = 2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$$

A la següent taula podem observar quina mida tenen en semitons temperats els principals intervals de la música occidental:

Interval	Semitons	Interval	Semitons
Uníson	0	Quinta	7
Segona menor	1	Sexta menor	8
Segona major	2	Sexta major	9
Tercera menor	3	Sèptima menor	10
Tercera major	4	Sèptima major	11
Quarta	5	Octava	12
Trítón	6		

Taula 2.1: Els intervals i la seva correspondència en semitons temperats.

A la vegada, cada semitò temperat es pot dividir en 100 parts iguals, obtenint així una nova unitat de mesura: el **cent**.

$$1 \text{ cent} = \frac{1}{100} \text{ semitò temperat} = \frac{1}{1200} \text{ octava}$$

La raó freqüencial d'un cent és $\sqrt[1200]{2} = 2^{1/1200}$, i prenent-lo com a unitat de mesura, podem obtenir la mida d'un interval mitjançant l'expressió:

$$c = 1200 \cdot \log_2 r$$

O bé obtenir la raó d'un interval a partir de la seva mesura en cents:

$$r = 2^{c/1200}$$

Nota 2.1. El principal al·licient que tenim per expressar un interval en cents, és que aquests ens permeten mesurar intervals molt petits i, a la vegada, comparar-los entre ells amb molta precisió. A més a més, els humans podem arribar a percebre una diferència de fins a 5 cents entre dos tons.

Per entendre la motivació darrere l'estudi de la construcció de les escales i la mesura dels intervals, és necessari fer alguns comentaris sobre la teoria de la dissonància.

2.2.3 Consonància d'intervals

Associem el terme **consonància** a la qualitat d'uns determinats sons que al escoltar-se simultàniament produeixen un efecte agradable.

Segons el filòsof romà Boeci, el primer en tractar l'estudi de la consonància va ser Pitàgores de Samos al segle VI a.C., quan va observar que si es tocaven simultàniament dues cordes similars sotmeses a la mateixa tensió, aquestes produïrien un to consonant sempre i que les seves longituds es trobessin relacionades per raons d'enters petits com ara $2 : 1$, $3 : 2$, $4 : 3$, ... Tanmateix, sembla que Pitàgores no va ser un matemàtic en termes rigorosos, sinó un personatge que atorgava un significat especial a un seguit de relacions matemàtiques.

Per a l'escola pitagòrica, els nombres més importants eren els 1, 2, 3 i 4, ja que sumaven 10 —el nombre que ells denominaven "perfecte"— i que representaven mitjançant un triangle anomenat tetractys. D'aquesta manera, reconeixien com a consonants els intervals derivats de les raons extrems del tetractys: $4 : 3$, $3 : 2$ i $2 : 1$ [24, p. 92-96].



Figura 2.2: Tetractys de l'escola pitagòrica

La teoria de Helmholtz

Al segle XIX, Hermann Helmholtz estudiaria la consonància a partir de la superposició de les ones sonores de dos tons. Siguin f_1, f_2 les respectives freqüències, aleshores:

- Si la diferència $f_1 - f_2$ és suficientment petita, percebem un to de freqüència $\frac{f_1+f_2}{2}$ i uns batiments.

- Si la diferència entre les freqüències és lleugerament superior, aleshores la sonoritat del to resultant esdevé aspre.
- Finalment, si la diferència entre les freqüències és encara més gran, percebem dos tons diferents.

Així doncs, quan escoltem dos tons simultanis, l'aspresa del timbre és conseqüència dels batecs de les parcials superiors a aquelles que són comunes en ambdós tons. Aquesta aspror és la que Helmholtz anomenava **dissonància**, la qual esdevé màxima per a freqüències de 30 a 40 Hz. Tanmateix, hi ha certes raons freqüencials que no generen —o molt poc— aquests batiments. Per aquest motiu, Helmholtz definia la **consonància** com l'absència de dissonància [13, p. 171 i 194].

Els experiments de Plomp i Levelt

Als anys seixanta, Plomp i Levelt van estudiar la dissonància a partir de les **bandes crítiques**. Aquestes són rangs de freqüència dins dels quals un to bloqueja la percepció d'un altre to. Podem considerar que la membrana basilar consta de 24 bandes crítiques, cadascuna de les quals s'encarrega de transformar el so en impuls nerviós, i la mida de les quals varia segons la freqüència, de manera que dues freqüències pròximes són processades per la mateixa banda crítica.

Amb aquesta finalitat, van dur a terme un experiment amb persones sense formació musical. Aquest consistia en que els subjectes avaluessin —en una escala decreixent en termes de dissonància— un determinat nombre de parelles de tons purs en diferents rangs de freqüència.

A partir d'aquesta prova, van poder observar que la dissonància màxima es produeix entre freqüències properes, a distància d'aproximadament una quarta part de l'amplada de la banda crítica. A mesura que aquesta distància augmenta, també ho fa el grau de consonància, de manera que l'interval es pot considerar consonant quan la seva magnitud és de l'ordre d'una amplada de banda crítica.

Partint de la hipòtesi que la dissonància total de dos tons complexos és la suma de les dissonàncies de les parcials, Plomp i Levelt van raonar què passaria si utilitzessin tons complexos en lloc de tons purs, i van representar gràficament la dissonància total entre un to de freqüència fixa i un to de freqüència variable —de 6 parcials cada un— en funció de la freqüència variable. El resultat va ser que s'establia una forta consonància quan els tons es trobaven separats per les raons freqüencials simples:

$$1 : 1 \quad 1 : 2 \quad 2 : 3 \quad 3 : 5 \quad 3 : 4 \quad 5 : 6 \quad 4 : 5$$

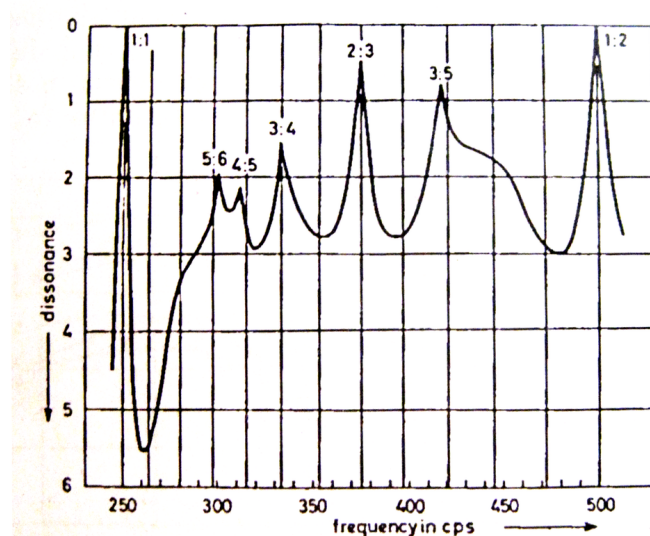


Figura 2.3: Màxims locals de consonància de l'estudi de Plomp i Levelt.

És important remarcar que si haguessin contemplat tons amb més de sis parcials, apareixerien més màxims locals a la gràfica anterior [19].

Classificació dels intervals

Les teories sobre la dissonància ens deixen entreveure que la consonància és una característica que ens permet classificar els intervals. Hem vist que aquesta depèn de les parcials d'un to complex i, per tant, de la respectiva sèrie harmònica.

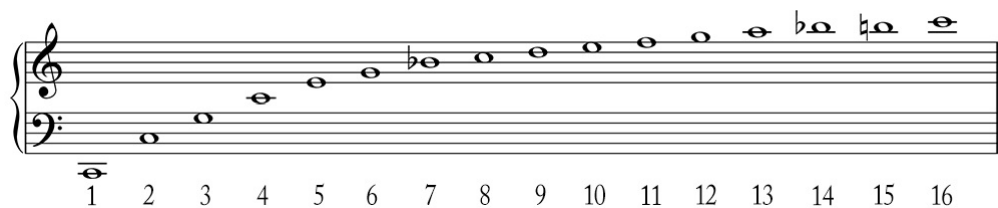


Figura 2.4: Sèrie harmònica de la nota Do

És fàcil deduir de la figura anterior les següents raons freqüencials respecte la nota fonamental de la sèrie, tot utilitzant l'equivalència d'octaves:

- 1:1 pels harmònics de la forma 2^i per $i = 0, 1, 2, \dots$
- 3:2 pels harmònics de la forma $2^i 3$ per $i = 0, 1, 2, \dots$
- 5:4 pels harmònics de la forma $2^i 5$ per $i = 0, 1, 2, \dots$
- 7:4 pels harmònics de la forma $2^i 7$ per $i = 0, 1, 2, \dots$

Podem seguir un mètode similar per trobar raons freqüencials de tots els intervals, i classificar-los en termes de consonància en funció del grau de senzillesa dels seus factors de nombres primers. D'aquesta manera, tindrem:

Interval	Raó	Consonància
Uníson	1 : 1	Consonant
Segona menor	16 : 15	Dissonant
Segona menor	9 : 8	Dissonant
Tercera menor	6 : 5	Semiconsonant
Tercera major	5 : 4	Semiconsonant
Quarta	4 : 3	Consonant
Tríton	7 : 5	Dissonant
Quinta	3 : 2	Consonant
Sexta menor	8 : 5	Semiconsonant
Sexta major	5 : 3	Semiconsonant
Sèptima menor	16 : 9	Dissonant
Sèptima major	15 : 8	Dissonant
Octava	2 : 1	Consonant

Taula 2.2: Classificació dels intervals

- Els intervals **consonants**:

1 : 1 4 : 3 3 : 2 2 : 1

- Els intervals **semiconsonants**:

6 : 5 5 : 4 8 : 5 5 : 3

- Els intervals **dissonants**:

16 : 15 9 : 8 7 : 5 16 : 9 15 : 8

Nota 2.2. Els intervals anteriors amb les raons associades seran els que coneixerem com a intervals justos, els quals maximitzen el grau de congruència de les parcials dels dos tons que els formen. Quan, a partir d'ara, parlem en termes genèrics d'un interval, com ara el de quinta, ens referirem a un interval semblant a la quinta justa de raó 3 : 2.

Siguin dos intervals de raó $a : b$ i $c : d$. Direm que són intervals **complementaris** si la seva suma ens proporciona l'octava, és a dir, si $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 2$. Segons aquesta propietat tenim que són complementaris:

- La quarta i la quinta, ja que $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$.
- La tercera major i la sexta menor, ja que $\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = 2$.
- La tercera menor i la sexta major, ja que $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$.
- La segona major i la setèima menor, ja que $\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{9} = 2$.
- La segona menor i la setèima major, ja que $\frac{16}{15} \cdot \frac{15}{8} = 2$.

2.3 Notes i escales

Definició 2.1. Una **escala** de n notes és un conjunt ordenat d'altures $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$. Anomenarem **pas** a l'interval entre dues notes consecutives a_i, a_{i+1} de l'escala tal que $i = 0, 1, \dots, n-1$. Direm que dues escales són **equivalents** si tenen la mateixa distribució de passos.

Exemple 2.3. En música, l'escala diatònica presenta la mateixa distribució de passos, sigui quina sigui la nota a_0 .

El mètode per calcular el pas varia en funció de si treballem en termes de l'escala additiva o l'escala multiplicativa. En el primer cas, les notes a_i, a_{i+1} estaran expressades en alguna unitat d'interval i, per tant, si tenim que f_i, f_{i+1} són les respectives freqüències, l'interval serà:

$$\log_2 \frac{f_{i+1}}{f_i} \text{ octaves}$$

Mentre que en el segon cas, treballarem amb les raons freqüencials d' a_i, a_{i+1} , obtenint l'interval mitjançant l'expressió:

$$\frac{f_2}{f_1}$$

Definició 2.2. Direm que una escala compleix el **principi de l'equivalència d'octaves** si, donada una nota de l'escala, també pertanyen a l'escala totes les notes a una octava de distància.

Això vol dir que podem suposar que a_0, \dots, a_{n-1} estan incloses en una mateixa octava, i la següent nota a_n es troba a una distància d'octava respecte a_0 . La majoria d'escales que considerarem compleixen aquesta propietat.

2.3.1 Construcció d'escales

Hi ha diversos mètodes per construir escales, però els més rellevants per a nosaltres en aquest estudi seran el de la divisió igual de l'octava i el de l'element generador.

El mètode de **divisió igual de l'octava** o **n -dio** divideix l'octava en n parts iguals per tal de distribuir-hi uniformement les notes de l'escala, de manera que tots els passos de l'escala tenen la mateixa mida. Aquest és el cas de l'**escala de tons** o **6-dio** amb pas de to, l'**escala cromàtica** o **12-dio** amb pas de semitò i l'**escala de quarts de to** o **24-dio** amb pas de $\frac{1}{4}$ de to.

D'altra banda, podem construir una escala a partir d'un sol interval, fent potències de la seva raó freqüencial i aplicant el principi de l'equivalència d'octaves per obtenir les notes de l'escala:

Definició 2.3. Sigui θ la raó freqüencial de l'interval generador. Aleshores, direm que $\Gamma(\theta, n) = \{\theta^i \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$ és una **escala generada** de n notes i generador θ , on $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$.

Observació 2.1. És important tenir en compte que en la definició anterior d'escala generada, les notes no es troben ordenades per altura sinó per ordre de generació. Per tal d'obtenir l'organització adequada haurem d'aplicar el principi de l'equivalència d'octaves.

2.4 Exemples d'escales

Fins ara hem vist les propietats genèriques i els principals mètodes de construcció de les escales basades en l'interval d'octava. En aquest apartat estudiarem més a fons les escales més importants.

2.4.1 L'escala pitagòrica

L'**escala pitagòrica** és un exemple d'escala generada a partir de l'interval de quinta, és a dir, a partir del generador $\theta = \frac{3}{2}$. Això és degut a que aquesta pretén maximitzar el nombre de quintes perfectes. Per aconseguir aquest objectiu, altres intervals com les terceres i les sextes esdevenen lleugerament desafinades, és a dir, la seva raó freqüencial es desvia de la que havíem obtingut a partir de la sèrie harmònica.

A l'hora de construir l'escala pitagòrica, ràpidament observem que una octava és el resultat de sumar una quarta i una quinta. D'aquí es dedueix que sumar una quarta és equivalent a restar una quinta —per l'equivalència d'octaves—, o el que és el mateix, sumar una quinta és equivalent a restar una quarta. Gràcies a aquesta propietat, es poden obtenir totes les notes de l'escala cromàtica mitjançant la suma de 12 quintes successives —o alternativament, de quarts. Aquesta suma progressiva és el que es coneix com a **cicle de quintes**.

Així doncs, prenem a_0 com a nota de referència de l'escala i sumem quintes per generar tota l'escala:

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^0, \left(\frac{3}{2}\right)^1, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{3}{2}\right)^4, \left(\frac{3}{2}\right)^5, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots \right\}$$

Un cop generada l'escala, multipliquem per $\frac{1}{2}$ totes aquelles notes que sobrepassen l'octava per ordenar-les per altures:

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, \dots \right\}$$

També podem generar l'escala restant quintes i aplicant l'equivalència d'octaves, aquest cop multiplicant la raó de l'interval per 2. D'aquesta manera obtenim que:

$$\Gamma = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^0, \left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{2}{3}\right)^5, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots \right\}$$

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{256}{243}, \frac{32}{27}, \frac{4}{3}, \frac{128}{81}, \frac{16}{9}, \dots \right\}$$

Si trunquem el procés de generació de l'escala pel cas $n = 7$, obtenim l'**escala pitagòrica diatònica** amb les proporcions [4, p. 166]:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Raó	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Pas		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
Cents	0.000	203.910	407.820	498.045	701.955	905.865	1109.775	1200.000

Taula 2.3: Escala pitagòrica pel cas $n = 7$

Observació 2.2. Notem que si trunquéssim l'escala anterior pel cas $n = 5$, obtindríem l'escala pentatònica amb la distribució de passos $\{2, 3, 2, 2, 3\}$, prenent el semitò com a unitat de mesura.

Tal i com mostra la taula, l'escala pitagòrica diatònica presenta dos passos diferents: el **to pitagòric** de raó $9 : 8$ i el **semitò pitagòric** de raó $256 : 243$. Tanmateix, aquest to no es correspon a la suma de dos semitons ja que:

$$\left(\frac{256}{243}\right)^2 = 1.109857915 \dots < 1.125 = \frac{9}{8}$$

A més a més, tenim que tres intervals de l'escala es troben desafinats:

- La **tercera major** de raó $\frac{81}{64} = 1.265625$ és més gran que la tercera major de raó $\frac{5}{4} = 1.25$.

- La **sexta major** de raó $\frac{27}{16} = 1.6875$ és més gran que la sexta major de raó $\frac{5}{3} = 1.\hat{6}$.
- La **sèptima menor** de raó $\frac{243}{128} = 1.8984375$ és més gran que la sèptima menor de raó $\frac{7}{4} = 1.75$.

En particular, la tercera major pitagòrica és una **coma sintònica** més gran que la tercera major justa, ja que $\frac{81}{64} \simeq \frac{80}{64} = \frac{5}{4}$ i $\frac{81}{80} = 1.0125$ és la mida de la coma esmentada.

D'altra banda, és immediat veure que podem factoritzar les raons freqüencials de les notes de l'escala en potències de 2 i 3. Això és degut a que hem utilitzat la quinta de raó $3 : 2$ per generar-les. Tanmateix, aquest procés és infinit ja que $\nexists p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $\left(\frac{3}{2}\right)^p = 2^q \iff 3^p = 2^{p+q}$. En altres paraules, no hi ha cap solució entera per l'equació anterior ja que una potència de 2 mai serà congruent a una de 3, si negligim el cas trivial $p = q = 0$.

Per estudiar amb més detall aquest resultat prenem l'**escala pitagòrica cromàtica** que es correspon a truncar el procés pel cas $n = 12$. Comencem calculant les 12 primeres notes de l'escala, les raons freqüencials de les quals trobem en la taula següent:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
Raó	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2

Taula 2.4: Escala pitagòrica pel cas $n = 12$

Si ara sumem una quinta més, obtenim que la raó freqüencial de la nota a_{12} és $\frac{2187}{1024} = 2.135742188\dots$ i, per tant, lleugerament superior a la raó d'octava de manera que no es compleix el principi d'equivalència. Per trobar la distància $d(a_1, a_{12})$, multipliquem per $\frac{1}{2}$ la raó d' a_{12} , de manera que obtenim:

$$d(a_1, a_{12}) = \frac{\frac{2187}{2048}}{\frac{256}{243}} = \frac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1.013643265\dots$$

Aquesta distància l'anomenarem **coma pitagòrica**. La diferència entre una quinta justa i la coma pitagòrica és la **quinta del llop**, i és l'interval que formen la primera i l'última notes del cicle de quintes.

2.4.2 Les escales justes

Amb les **escales justes** es pretenen resoldre alguns dels problemes de l'escala pitagòrica. Per tal d'aconseguir aquest objectiu, es busca que les terceres, quartes i quintes siguin el més consonants possible, tot utilitzant les raons freqüencials $6 : 5 : 4$ que havíem obtingut amb la sèrie harmònica.

Actualment disposem d'un ampli ventall d'escals justes, però per limitacions d'espai ens centrarem en l'estudi de l'**escala justa de Zarlino**, la qual opta per aplicar les raons esmentades —que a partir d'ara anomenarem justes— als acords tríades majors sobre la primera, quarta i cinquena nota de l'escala diatònica. Entenem per **acord tríada major** el resultat de sumar una tercera major i una tercera menor.

D'aquesta manera, les raons freqüencials obtingudes per a les notes de l'escala esdevenen molt més simples i es corresponen a les de la sèrie harmònica, tal i com mostra l'**escala justa diatònica de Zarlino** [4, p. 168]:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Raó	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Pas		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
Cents	0.000	203.910	386.314	498.045	701.955	884.359	1088.269	1200.000

Taula 2.5: Escala justa de Zarlino pel cas $n = 7$

Anàlogament, les raons freqüencials de l'escala justa de Zarlino es poden expressar com a producte de potències de 2, 3 i 5. Tanmateix, aquest increment de factors comporta que aquesta escala diatònica tingui tres passos diferents: el **to major just** de raó 9 : 8, el **to menor just** de raó 10 : 9 i el **semitò just** de raó 16 : 15. Aquesta diversitat dificulta poder imposar les raons justes pels principals tríades majors a totes les octaves i, per tant, les quintes i les quartes esdevenen imperfectes, diferint una coma sintònica de l'interval just.

2.4.3 Els temperaments mesotònics

Un altre intent per potenciar la puresa de les terceres el trobem amb els **temperaments mesotònics**, els quals són una alteració d'una fracció de coma sintònica de les quintes de l'escala pitagòrica per a que s'aproximin a l'escala justa, és a dir, que les terceres majors sonin més pures. Alguns exemples són els temperaments mesotònics de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$ i $\frac{1}{3}$ de coma sintònica. En particular, el **temperament mesotònic de $\frac{1}{4}$ de coma sintònica** estableix la raó 5 : 4 per a la tercera major i interpola la resta de manera equitativa. D'aquesta manera, les quartes i les quintes ja no seran perfectes [4, p. 185].

2.4.4 Els temperaments irregulars

Per tal de solucionar el problema de la quinta del llop dels temperaments mesotònics, els **temperaments irregulars** opten per distribuir l'error d'aquesta quinta —i.e. la coma pitagòrica— de manera irregular entre les quintes del cicle, de manera que passem

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Raó	1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{5^5}}{4}$	2
Pas		$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{\sqrt[4]{5^5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{8}{\sqrt[4]{5^5}}$
Cents	0.000	193.157	386.314	503.422	696.579	889.735	1082.892	1200.000

Taula 2.6: Temperament mesotònic de $\frac{1}{4}$ de coma sintònica pel cas $n = 7$

a tenir més d'una mesura per a la quinta i la tercera. El **tercer temperament de Werckmeister** redueix $\frac{1}{4}$ de coma pitagòrica les quintes $a_0 - a_7, a_7 - a_2, a_2 - a_9$ i $a_{11} - a_6$, mentre que assoleix una quarta justa a a_5 [4, p. 190]:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{64}{81} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{256}{243} \cdot \sqrt[4]{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$
Pas		$\frac{256}{243}$	$\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{8}{9} \cdot \sqrt[4]{2}$	$\frac{81}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{256}{243}$
Cents	0.000	90.225	192.180	294.135	390.225	498.045	588.270

Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
Raó	$\frac{8}{9} \cdot \sqrt[4]{8}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{1024}{729} \cdot \sqrt[4]{2}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{128}{81} \cdot \sqrt[4]{2}$	2
Pas	$\frac{81}{128} \cdot \sqrt[4]{8}$	$\frac{16}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{8}{9} \cdot \sqrt[4]{2}$	$\frac{81}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{8}{9} \cdot \sqrt[4]{2}$	$\frac{81}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
Cents	696.090	792.180	888.270	996.090	1092.180	1200.000

Taula 2.7: Tercer temperament de Werckmeister pel cas $n = 12$

2.4.5 L'escala 12–dio

Totes les escales que hem vist fins ara opten per potenciar la consonància d'uns determinats intervals a partir de desafinar-ne d'altres. En canvi, l'**escala 12–dio** —més coneguda com temperament igual— opta per fer dotze divisions iguals de l'octava. D'aquesta manera, tots els semitons tindran raó $\sqrt[12]{2} : 1$ i, de retruc, la raó de tots els tons serà $\sqrt[6]{2} : 1$ [4, p. 199].

Amb aquest sistema, les terceres temperades resulten uns 14 cents més grans que les terceres perfectes, però d'altra banda, tots els intervals són equivalents i d'aquesta manera podem tancar el cicle de quintes, ometent el problema de la quinta del llop.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Raó	1	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[4]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	2
Pas		$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[12]{2}$
Cents	0.000	200.000	400.000	500.000	700.000	900.000	1100.000	1200.000

Taula 2.8: Escala 12-dio pel cas $n = 7$

2.5 Comparativa de les escales

En el transcurs d'aquest capítol hem pogut estudiar dos mètodes principals de construcció d'escales, basats en la divisió igual de l'octava i la generació a partir d'un interval. Aquest últim l'hem vist exemplificat amb l'escala pitagòrica, la qual ens ha plantejat una sèrie de problemàtiques. Per tal de poder fer front a les dificultats d'aquesta escala, hem vist tres plantejaments diferents: les escales justes, els temperaments mesotònics i els temperaments irregulars. La següent taula ens mostra breument les particularitats de l'escala diatònica resultant de cada mètode, expressada com a raó decimal i en cents:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
P	1	1.125	1.265625	$1.\hat{3}$	1.5	1.6875	1.8984375
J	1	1.125	1.25	$1.\hat{3}$	1.5	$1.\hat{6}$	1.875
M	1	1.118034	1.25	1.337481	1.495349	1.671851	1.869186
I	1	1.117403	1.252827	$1.\hat{3}$	1.494927	1.670436	1.879241
12-dio	1	1.122462	1.259921	1.334840	1.498307	1.681793	1.887749
P	0.000	203.910	407.820	498.045	701.955	905.865	1109.775
J	0.000	203.910	386.314	498.045	701.955	884.359	1088.269
M	0.000	193.157	386.314	503.422	696.579	889.735	1082.892
I	0.000	192.180	390.225	498.045	696.090	888.270	1092.180
12-dio	0.000	200.000	400.000	500.000	700.000	900.000	1100.000

Taula 2.9: Comparativa de les escales pitagòrica, justa de Zarlino, mesotònica de $\frac{1}{4}$ de coma sintònica, irregular de Werckmeister III i 12-dio pel cas $n = 7$ en raons i en cents.

Capítol 3

Escales i fraccions contínues

Fins ara hem estudiat les escales en funció de la racionalitat de les raons freqüencials que defineixen els seus intervals, i hem observat que l'escala pitagòrica es pot expressar com a producte dels nombres primers 2 i 3, de manera que pel cas $n = 7$ esdevé:

$$\mathbf{P} = \left\{ 1, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{2^2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^5}{2^7} \right\}$$

Anàlogament, també hem vist que és possible expressar en factors de potències de 2, 3 i 5 les raons freqüencials de l'escala justa de Zarlino, tot obtenint que l'escala diatònica és:

$$\mathbf{J} = \left\{ 1, \frac{3^2}{2^3}, \frac{5}{2^2}, \frac{2^2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3 \cdot 5}{2^3} \right\}$$

Aquest tractament de les escales ens suggereix una nova definició d'aquestes:

Definició 3.1. Sigui p un nombre primer. Direm que una escala és p -límit si les seves raons freqüencials $a : b$ es poden expressar com a producte de potències de nombres primers $p_i \leq p$. És a dir, són de la forma $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ amb $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$.

Observació 3.1. Segons aquesta nomenclatura, l'escala pitagòrica esdevé 3-límit i l'escala justa de Zarlino 5-límit.

Així doncs, una altra manera de classificar escales és mitjançant la utilització d'un subconjunt de nombres primers.

Exemple 3.1. L'escala simètrica de 43 notes de Harry Partch és un exemple d'escala 11-límit que utilitza els nombres primers 2, 3, 5, 7 i 11 [4, p. 211].

Tanmateix, en aquest capítol ens centrarem en l'estudi de les escales formades a partir de les fraccions contínues, les quals utilitzem per aproximar la raó d'un determinat interval. Un cop obtinguda la fracció corresponent, n'estudiem les propietats per tal de confeccionar una determinada escala, la qual pot complir o no l'equivalència d'octaves. Aquesta característica ens servirà per classificar les escales en dos blocs: les que es basen en l'interval d'octava i les que no. Es recomana consultar l'**Apèndix A** adjuntat al final del document, en el que s'exposen les nocions sobre fraccions contínues que utilitzarem.

3.1 Escales amb divisions iguals de l'octava

La característica essencial d'aquestes escales és que es fonamenta en el principi de divisió igual de l'octava i, per tant, hi haurà un únic pas entre qualsevol parella de notes consecutives de l'escala. Seguint el mètode de les fraccions contínues per construir escales que compleixin l'equivalència d'octaves, ens centrarem en aquelles que aproximïn la quinta pitagòrica amb raó $3 : 2$ i la quinta mesotònica amb raó $\sqrt[4]{5}$.

3.1.1 Aproximació de la quinta justa

Hem vist que l'escala pitagòrica és un cas particular d'escala generada per l'interval de quinta, el qual podem expressar —en termes de l'escala additiva— mitjançant el generador $\theta = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$, i que ens indica el nombre d'octaves al que equival una quinta justa. Aprofitant les nocions de fraccions contínues que exposem a l'**Apèndix A**, podem expressar el nombre irracional $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ mitjançant l'expansió:

$$\frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{3+} \frac{1}{1+} \frac{1}{5+} \frac{1}{2+} \frac{1}{23+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \dots$$

Nota 3.1. El fet que $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ sigui un nombre irracional provoca que el procés de generació d'una escala pitagòrica sigui infinit, ja que si $\theta = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ fos racional, aleshores tindríem que $\theta = \frac{p}{q}$ on $p, q \in \mathbb{Z}$ amb $q \geq 1$ tal que $\frac{3}{2} = 2^{\frac{p}{q}} \iff 3^q = 2^{p+q}$, cosa impossible llevat que $p = q = 0$.

Segons el mètode definit a l'apèndix esmentat, també podem calcular de forma recursiva els convergents de la fracció contínua de $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$, obtenint així la seqüència:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \dots$$

Conèixer aquests valors és substancial, ja que els denominadors ens indiquen en quantes parts iguals podem dividir l'octava, mentre que els numeradors mostren quina nota de l'escala aproxima una quinta justa. El primer cas d'interès és el convergent $\frac{7}{12}$, que correspon a l'escala 12-dio explicada al capítol anterior i és la que més s'utilitza avui en dia. Els següents casos que més ens interessin són la 41-dio i la 53-dio.

L'escala 41-dio

Com el seu nom indica, l'escala 41-dio consta de 41 notes distribuïdes uniformement en l'interval d'octava amb un únic pas de raó $\sqrt[41]{2}$, o el que és el mateix, de $\frac{1200}{41} = 29.268$ cents. Un dels avantatges d'aquesta escala és que presenta una millor aproximació per la quinta justa de la que oferia l'escala 12-dio, ja que $\frac{24}{41}$ és un convergent superior a $\frac{7}{12}$. Aquesta aproximació de la quinta es troba a 24 passos de la primera nota de l'escala.

	Justa	12–dio	41–dio
Quinta	701.955	700.000	702.439

Taula 3.1: Comparativa en cents de la quinta justa, 12–dio i 41–dio.

Observació 3.2. És interessant notar a la Taula B.1 que l'increment de la part decimal $\triangle(x - \lfloor x \rfloor)$ de cada nota de l'escala 41–dio segueix el patró:

$$\left\{ +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, -\frac{30}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, -\frac{30}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, -\frac{30}{41}, +\frac{11}{41}, +\frac{11}{41}, -\frac{30}{41} \right\}$$

L'escala 53–dio

D'altra banda, l'escala 53–dio consta de 53 notes distribuïdes uniformement en l'interval d'octava amb un únic pas de raó $\sqrt[53]{2}$, o el que és el mateix, de $\frac{1200}{53} = 22.642$ cents. Un dels avantatges de fer una partició més fina de l'octava és que amb ella obtenim una millor aproximació de la quinta justa que amb l'escala 41–dio i, com és d'esperar, necessitarem recórrer un major nombre de passos per obtenir aquesta aproximació, concretament, 31.

	Justa	41–dio	53–dio
Quinta	701.955	702.439	701.887

Taula 3.2: Comparativa en cents de la quinta justa, 41–dio i 53–dio.

Però això no és tot, l'escala 53–dio també ens permet millorar considerablement l'afinació de les terceres i les sèptimes de l'escala 12–dio, tot i que l'escala 41–dio aproxima millor la sèptima menor.

Observació 3.3. Anàlogament, l'increment de la part decimal $\triangle(x - \lfloor x \rfloor)$ de les notes de l'escala 53–dio també segueix un patró determinat, tal i com podem observar a la Taula B.3:

$$\left\{ +\frac{34}{53}, -\frac{19}{53}, +\frac{34}{53}, -\frac{19}{53}, -\frac{19}{53}, +\frac{34}{53}, -\frac{19}{53}, -\frac{19}{53}, +\frac{34}{53}, -\frac{19}{53}, -\frac{19}{53} \right\}$$

3.1.2 Aproximació de la quinta mesotònica

Tal i com hem vist al segon capítol, els temperaments mesotònics aproximen molt bé les terceres majors justes. Aquest fet és substancial, ja que la suma d'una tercera major i menor origina l'acord tríada, pilar essencial de l'harmonia occidental. Així

	Justa	12–dio	41–dio	‡ passos	53–dio	‡ passos
Tercera menor	315.641	300.000	321.951	11	316.981	14
Tercera major	386.314	400.000	380.488	13	384.906	17
Sèptima menor	968.826	1000.000	965.854	33	973.585	43
Sèptima major	1088.269	1100.000	1082.927	37	1086.792	48

Taula 3.3: Comparativa en cents de les terceres i sèptimes majors i menors de les escales justa, 12–dio, 41–dio i 53–dio, i nombre de passos per a cada interval de les dues últimes escales.

doncs, ens interessa aproximar mitjançant fraccions contínues els extrems de l'acord tríada construït amb terceres mesotòniques: la quinta mesotònica de raó $\sqrt[4]{5}$.

$$\log_2(\sqrt[4]{5}) = \frac{1}{4} \log_2 5 = \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \dots$$

Un cop més, si calculem els convergents d'aquesta fracció contínua, obtenim la seqüència:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{101}{174}, \frac{119}{205}, \dots$$

Observació 3.4. Els convergents $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ i $\frac{7}{12}$ també havien aparegut a la fracció contínua que aproximava la quinta pitagòrica. És curiós veure que aquesta expansió aporta una possible escala diatònica de 7 passos iguals amb el convergent $\frac{4}{7}$.

Prosseguim, doncs, a estudiar amb més detall les escales 19–dio i 31–dio:

L'escala 19–dio

Per definició, l'**escala 19–dio** consta de 19 notes distribuïdes uniformement en l'interval d'octava amb un únic pas de raó $\sqrt[19]{2}$ que equival a $\frac{1200}{19} = 63.158$ cents. Com que aquesta escala és fruit d'un convergent per aproximar la quinta mesotònica, és d'esperar que presentarà una millor aproximació per a tots els intervals d'aquesta escala envers l'escala 12–dio, tal i com observem a continuació pel cas de la quinta, que trobem a 11 passos de la primera nota de l'escala:

	Mesotònica	12–dio	19–dio
Quinta	696.579	700.000	694.737

Taula 3.4: Comparativa en cents de la quarta i la quinta mesotònica, 12–dio i 19–dio.

Una de les coses que podem observar és que l'escala 19–dio aporta millors aproximacions que l'escala 53–dio per la tercera menor:

	Justa	53–dio	19–dio
Tercera menor	315.641	316.981	315.789

Taula 3.5: Comparativa en cents de la tercera menor de les escales justa, 53–dio i 19–dio.

Observació 3.5. Un cop més, l'increment de la part decimal $\triangle(x - \lfloor x \rfloor)$ de cada nota d'aquesta escala segueix un patró molt específic, tal i com mostra la Taula B.5:

$$\left\{ +\frac{3}{19}, +\frac{3}{19}, +\frac{3}{19}, +\frac{3}{19}, +\frac{3}{19}, +\frac{3}{19}, -\frac{16}{19} \right\}$$

L'escala 31–dio

Finalment, l'escala 31–dio consta de 31 notes distribuïdes uniformement en l'interval d'octava amb un únic pas de raó $\sqrt[31]{2}$ que es correspon a $\frac{1200}{31} = 38.710$ cents. Tal i com ens passava amb les escales 41–dio i 53–dio, si dividim l'octava en 31 parts iguals enlloc de 19 obtenim una millor aproximació per a tots els intervals de l'escala mesotònica, dels que destaquem la quinta que trobem a 18 passos de la primera nota de l'escala:

	Mesotònica	19–dio	31–dio
Quinta	696.579	694.737	696.774

Taula 3.6: Comparativa en cents de la quinta mesotònica, 19–dio i 31–dio.

Anàleg al cas de la 19–dio, l'escala 31–dio també ofereix millors aproximacions per l'escala justa que l'escala 53–dio, però aquesta vegada per la tercera major.

	Justa	53-dio	31-dio
Tercera major	386.314	384.906	387.097

Taula 3.7: Comparativa en cents de la tercera major de les escales justa, 53-dio i 31-dio.

Observació 3.6. La Taula B.7 ens mostra que l'increment de la part decimal $\triangle(x - [x])$ de cada nota de l'escala 31-dio també segueix un patró molt clar:

$$\left\{ +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, \right. \\ \left. +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31}, +\frac{22}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{9}{31} \right\}$$

3.1.3 Aproximació de la tercera major mesotònica

Com hem vist abans, els temperaments mesotònics ofereixen una molt bona aproximació per les terceres majors i, en particular, hem estudiat el temperament mesotònic de $\frac{1}{4}$ de coma sintònica que proposa la tercera major de raó $\frac{5}{4}$, és a dir, de raó justa. Per tant, una qüestió que ens podem plantejar és què succeeix si en lloc d'aproximar la quinta mesotònica amb fraccions contínues, aproximem la tercera major.

Per a fer-ho, calculem l'expansió associada al nombre $\log_2\left(\frac{5}{4}\right)$, que resulta ser de la forma:

$$\frac{1}{3+} \frac{1}{9+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{6+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots$$

De la que trobem els següents convergents:

$$0, \frac{1}{3}, \frac{9}{28}, \frac{19}{59}, \frac{47}{146}, \frac{207}{643}, \frac{1289}{4004}, \frac{2785}{8651}, \frac{4074}{12655}, \frac{6859}{21306}, \dots$$

Com que tres notes no són suficients per formar una escala, el primer convergent que considerem és el $\frac{9}{28}$, el qual donaria lloc a una escala de 28 notes per octava, separades entre elles per un pas constant de raó $\sqrt[28]{2}$ que equival a $\frac{1200}{28} = 42.857$ cents. Si construïm l'escala 28-dio, ràpidament observarem que la tercera major justa és l'únic interval que aproxima bé. Tanmateix, és remarcable ja que amb una partició menys fina de l'octava, l'escala 28-dio aproxima millor aquest interval que l'escala 31-dio:

	Justa	12-dio	28-dio	♯ passos	31-dio	♯ passos
Tercera major	386.314	400.000	385.714	9	387.097	10

Taula 3.8: Comparativa en cents de la tercera major de les escales justa, 12-dio, 28-dio i 31-dio, i nombre de passos per a cada interval de les dues últimes escales.

D'altra banda, l'escala no ens proporciona una bona aproximació per intervals bàsics com la quinta, ja sigui justa o mesotònica de $\frac{1}{4}$ de coma sintònica:

	Mesotònica	Justa	12–dio	28–dio	‡ passos	28–dio	‡ passos
Quinta	696.579	701.955	700.000	685.714	16	728.571	17

Taula 3.9: Comparativa en cents de la quinta de les escales mesotònica, justa, 12–dio i 28–dio, i nombre de passos per als intervals de l'última escala.

Un altre aspecte que val la pena destacar de l'escala 28–dio és que les notes $a_7 = 300$ cents, $a_{14} = 600$ cents i $a_{21} = 900$ cents es corresponen als intervals de tercera menor, tríton i sexta major, respectivament, de l'escala 12–dio.

Per tant, hem vist que l'aproximació de la tercera mesotònica —que en el cas particular estudiat es correspon a la justa—, no ens proporciona una bona aproximació pels intervals justos, i tret del cas particular de la tercera major, no és una escala que resulti útil en termes musicals. Es pot consultar amb més detall a la Taula B.9.

3.2 Escales amb divisions iguals d'altres intervals

Com ja hem anticipat abans, les fraccions contínues també ofereixen la possibilitat de construir escales que no es fonamentin en l'equivalència d'octaves, és a dir, que el nombre de notes per octava no sigui un enter. Aquestes escales s'anomenen **xen-harmòniques**. Per tal d'exemplificar amb més detall en què consisteixen, estudiarem les escales α, β i γ proposades per Wendy Carlos i l'escala de Bohlen-Pierce.

3.2.1 Les escales de Wendy Carlos

A l'article *Tuning: At the Crossroads*, Wendy Carlos proposava dividir la quinta en lloc de l'octava en parts iguals. El plantejament que utilitzava durant la divisió esmentada es basava en seleccionar aquelles notes de l'escala justa que volia aproximar, com ara la tercera major, i a continuació incrementar progressivament la mida dels passos, tot buscant la desviació mínima entre les freqüències ideals i les aproximacions. D'aquesta manera van sorgir les escales α, β i γ de 9, 11 i 20 notes compreses dins l'interval de quinta justa, respectivament, les quals no satisfan el principi de l'equivalència d'octaves. En particular, la unió de les notes de les dues primeres escales originen la tercera, tal i com l'escala pentatònica de tecles negres del piano i l'heptatònica de tecles blanques origina la 12–dio [7].

Així doncs, les escales de Wendy Carlos van ser dissenyades amb l'objectiu d'obtenir la millor aproximació possible per als intervals de quinta i tercera major justa, per tant, inevitablement també tindrem una bona aproximació per la tercera menor justa, ja que $\frac{3/2}{5/4} = \frac{6}{5}$.

Si prenem ara logaritmes, és fàcil veure que necessitem aproximar el valor de $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{4}\right)$ amb fraccions contínues, és a dir, el nombre de quintes justes que conté una tercera major justa:

$$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{4+} \frac{1}{2+} \frac{1}{6+} \dots$$

I si calculem els convergents de l'expansió anterior, trobem que aquests són:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{11}{20}, \frac{71}{129}, \frac{82}{149}, \dots$$

És immediat veure a la seqüència anterior que les escales α i β provenen respectivament dels convergents $\frac{5}{9}$ i $\frac{11}{20}$. Per tal de trobar el convergent de l'escala β és important tenir en compte que si disposem en ordre creixent la seqüència anterior, obtenim que:

$$\frac{1}{2} < \frac{11}{20} < \frac{82}{149} < \dots < \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{4}\right) < \dots < \frac{71}{129} < \frac{5}{9} < 1$$

I per tant, l'escala β es pot intuir en el denominador del semi-convergent $\frac{6}{11}$ [21]:

$$\frac{0 \cdot 5 + 1}{0 \cdot 9 + 2} = \frac{1}{2} < \frac{1 \cdot 5 + 1}{1 \cdot 9 + 2} = \frac{6}{11} < \frac{2 \cdot 5 + 1}{2 \cdot 9 + 2} = \frac{11}{20}$$

Així doncs, cada convergent de la forma $\frac{n}{d}$ amb $n, d \in \mathbb{Z}$ correspon a dividir la quinta en d parts iguals, de les quals la nota n -èsima aproxima una tercera major. I com que el resultat de restar els dos intervals anteriors és una tercera menor, tenim que la $(d-n)$ -èsima nota aproximarà aquest darrer interval.

Per tal d'optimitzar aquesta aproximació, haurem de minimitzar la variància, és a dir, la funció que descriu la desviació entre el convergent seleccionat i el nombre irracional que pretenem aproximar amb la fracció contínua. Sigui x el pas de l'escala expressat en octaves; ens disposem a minimitzar la següent funció:

$$\left(nx - \log_2\left(\frac{5}{4}\right)\right)^2 + \left(dx - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2 + \left((d-n)x - \log_2\left(\frac{6}{5}\right)\right)^2$$

Derivant i igualant a zero l'expressió anterior obtenim que:

$$2n\left(nx - \log_2\left(\frac{5}{4}\right)\right) + 2d\left(dx - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 2(d-n)\left((d-n)x - \log_2\left(\frac{6}{5}\right)\right) = 0$$

Agrupant i aïllant la x trobarem una fórmula tancada que podrem utilitzar per les escales α, β i γ :

$$\begin{aligned} n^2x + d^2x + (d-n)^2x - n\log_2\left(\frac{5}{4}\right) - d\log_2\left(\frac{3}{2}\right) - (d-n)\log_2\left(\frac{6}{5}\right) &= 0 \iff \\ \iff x = \frac{n\log_2\left(\frac{5}{4}\right) + d\log_2\left(\frac{3}{2}\right) + (d-n)\log_2\left(\frac{6}{5}\right)}{n^2 + d^2 + (d-n)^2} \end{aligned}$$

L'escala α

Hem vist que prenent el convergent $\frac{5}{9}$ obtenim l'escala α . Si calculem el valor de x per aquest cas particular a partir de la fórmula anterior obtenim que:

$$x = \frac{5 \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) + 9 \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) + 4 \log_2 \left(\frac{6}{5}\right)}{5^2 + 9^2 + 4^2} \approx 0.06497082462$$

Multiplicant aquesta quantitat aproximada per 1200, obtindrem que cada pas de l'escala serà de 77.965 cents i, per tant, cada octava contindrà $\frac{1200}{77.965} = 15.3915$ passos. Per tal de simplificar els càlculs, Wendy Carlos adopta un pas de 78 cents, de manera que ara cada octava conté 15.385 passos. Una de les curiositats de l'escala α és que divideix l'interval de tercera menor en dues parts iguals [7].

Interval	Justa	12–dio	α	# passos
Quinta	701.955	700.000	702.000	9
Tercera major	386.314	400.000	390.000	5
Tercera menor	315.641	300.000	312.000	4

Taula 3.10: Comparativa de les terceres major i menor i la quinta justa, 12–dio i α .

Així doncs, l'escala α consta de 9 notes compreses en l'interval de quinta, tal i com podem observar a les taules B.10 i B.11. Tanmateix, podem estendre l'escala a l'àmbit d'octava a partir de sumar 8 passos més de 78 cents, tot i que l'última nota d'aquesta escala no complirà el principi de l'equivalència d'octaves. Aquesta ampliació de l'escala α consta de 16 notes.

Nota 3.2. Wendy Carlos també proposava una escala α' que contingüés el doble de notes que l'escala α , de manera que així es podia completar l'octava. Amb aquesta modificació aconseguia que la 25–èsima nota fos una bona aproximació pel setè harmònic, ja que 974.562 cents s'aproxima força als 968.826 cents de la raó $\frac{7}{4}$.

Al no basar-se en el principi de l'equivalència d'octaves, l'escala α ampliada no es beneficia de la propietat dels intervals complementaris. A la següent taula podem observar que l'escala α no aproxima bé cap dels tres intervals estudiats, mentre que l'escala 19–dio ofereix una excel·lent aproximació per la sexta major, tot i que no supera l'aproximació de la 12–dio per a la quarta justa. De les tres, l'escala 19–dio és la millor que aproxima la sexta menor.

Interval	Justa	12–dio	19–dio	♯ passos	α	♯ passos
Quarta	498.045	500.000	505.263	8	468.000	6
Sexta major	884.359	900.000	884.211	14	780.000	10
Sexta menor	813.686	800.000	821.053	13	780.000	10

Taula 3.11: Comparativa de la quarta i les sextes major i menor justa, 12–dio, 19–dio i α .

L'escala β

Tal i com hem vist abans, l'escala β sorgeix del semi-convergent $\frac{6}{11}$. Si calculem el valor de x de forma anàloga arribarem al resultat:

$$x = \frac{6 \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) + 11 \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) + 5 \log_2 \left(\frac{6}{5}\right)}{6^2 + 11^2 + 5^2} \approx 0.05319411048$$

Un cop més, multipliquem el valor aproximat obtingut per 1200 i obtenim que cada pas de l'escala equival a 63.833 cents, de manera que cada octava consta de 18.7991 passos. Un dels avantatges que assolim amb l'escala β és la bona aproximació del setè harmònic, tal i com Wendy Carlos pretenia aconseguir amb la variació α' . Tanmateix, amb l'escala β aquesta aproximació la trobem amb la nota a_{15} de 957.494, la qual és molt propera als 968.826 cents corresponents a la raó 7 : 4.

Si incorporem aquesta característica al càlcul dels passos per tal de precisar encara més aquesta aproximació, tenim que:

$$x = \frac{15 \log_2 \left(\frac{7}{4}\right) + 6 \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) + 11 \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) + 5 \log_2 \left(\frac{6}{5}\right)}{15^2 + 6^2 + 11^2 + 5^2} \approx 0.02924878523$$

D'aquesta manera, reduïm el nombre de passos per octava en 18.677 de 64.251 cents cada un, i l'aproximació del setè harmònic esdevé $a_{15} = 963.759$ cents. No obstant, l'escala β que utilitza Wendy Carlos no contempla aquesta modificació, i arrodoneix a 63.800 cents la mida de cada pas. D'aquesta manera, l'escala manté la divisió en dues parts iguals de l'interval de tercera major, tot i que la mida d'aquestes disminueix lleugerament [7].

Per tant, l'escala β consta de 11 notes compreses en l'interval de quinta, tal i com podem observar a les taules B.12 i B.13. Tanmateix, podem estendre l'escala a l'àmbit d'octava a partir de sumar 8 passos més de 63.800 cents, tot i que l'última nota d'aquesta escala no complirà el principi de l'equivalència d'octaves. Aquesta ampliació de l'escala β consta de 19 notes.

Interval	Justa	12–dio	β	# passos
Quinta	701.955	700.000	701.800	11
Tercera major	386.314	400.000	382.800	6
Tercera menor	315.641	300.000	319.000	5

Taula 3.12: Comparativa de les terceres major i menor i la quinta justa, 12–dio i β .

Al no haver-hi equivalència d'octaves, els intervals de l'escala β no són complementaris i, per tant, els hem d'estudiar a part. A continuació podem observar com aproxima l'escala β els intervals de quarta justa i sexta, a la vegada que comparem la versió ampliada amb l'escala 19–dio del mateix cardinal:

Interval	Justa	12–dio	19–dio	# passos	β	# passos
Quarta	498.045	500.000	505.263	8	510.400	8
Sexta major	884.359	900.000	884.211	14	893.200	14
Sexta menor	813.686	800.000	821.053	13	829.400	13

Taula 3.13: Comparativa de la quarta i les sextes major i menor justa, 12–dio, 19–dio i β .

Un cop més, l'escala β no aproxima cap dels tres intervals anteriors i, per tant, l'escala 12–dio segueix sent la millor aproximació per la quinta justa, i l'escala 19–dio per les sextes.

L'escala γ

Prenent el convergent $\frac{11}{20}$ obtenim l'escala γ , de manera que el valor aproximat de x esdevé:

$$x = \frac{11 \log_2 \left(\frac{5}{4}\right) + 20 \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) + 9 \log_2 \left(\frac{6}{5}\right)}{11^2 + 20^2 + 9^2} \approx 0.02924878523$$

Si ara multipliquem per 1200 obtenim que cada octava consta de 34.1895 passos de 35.099 cents cada un, tot i que Wendy Carlos els arrodoneix a 35.100 cents [7]. Aquestes proporcions permeten que l'escala γ presenti molt bones aproximacions per a les quintes justes i les terceres majors, però també impossibilita assolir una bona aproximació pel setè harmònic de raó 7 : 4.

Interval	Justa	12–dio	γ	# passos
Quinta	701.955	700.000	702.000	20
Tercera major	386.314	400.000	386.100	11
Tercera menor	315.641	300.000	315.900	9

Taula 3.14: Comparativa de les terceres major i menor i la quinta justa, 12–dio i γ .

Així doncs, l'escala γ consta de 20 notes compreses en l'interval de quinta, tal i com podem observar a les taules B.14 i B.15. Tanmateix, podem estendre l'escala a l'àmbit d'octava a partir de sumar 15 passos més de 63.800 cents, tot i que l'última nota d'aquesta escala no complirà el principi de l'equivalència d'octaves. Aquesta ampliació de l'escala γ consta de 35 notes.

Com que no tenim equivalència d'octaves, els intervals de l'escala γ no són complementaris i els hem d'estudiar a part. La següent taula compara els intervals de quarta justa i sexta de la versió ampliada de l'escala γ amb les escales 31–dio i 41–dio:

Interval	Justa	12–dio	31–dio	# p.	γ	# p.	41–dio	# p.
Quarta	498.045	500.000	503.226	13	491.400	14	497.561	17
Sexta major	884.359	900.000	890.323	23	877.500	25	878.049	30
Sexta menor	813.686	800.000	812.903	21	807.300	23	819.512	28

Taula 3.15: Comparativa de la quarta i les sextes major i menor justa, 12–dio, 31–dio, γ i 41–dio.

L'escala γ és una partició més fina de la quinta que les escales α i β , per tant, aproxima una mica millor els intervals anteriors, tot i que no supera la precisió de les escales amb les que la hem comparat. Val la pena destacar la bona aproximació de l'escala 31–dio per la sexta menor i la de l'escala 41–dio per la quarta justa, la qual és més acurada que la que obteníem amb l'escala 12–dio.

Aquesta precisió superior de l'escala γ respecte les escales α i β també es posa de manifest amb els intervals de quinta i tercera, tot i que l'escala α ofereix la mateixa aproximació per la quinta que l'escala γ , tal i com podem observar a la següent taula:

Interval	Justa	α	β	γ
Quinta	701.955	702.000	701.800	702.000
Tercera major	386.314	390.000	382.800	386.100
Tercera menor	315.641	312.000	319.000	315.900

Taula 3.16: Comparativa de les terceres major i menor i la quinta justa, α, β i γ .

3.2.2 Les escales de Bohlen-Pierce

Totes les escales que hem vist fins ara aporten diverses solucions per aproximar, parcialment o íntegrament, l'acord tríada major de raó $6 : 5 : 4$. Tanmateix, si considerem l'espectre harmònic imparell —que es correspon al d'instruments de vent amb forma cilíndrica com el clarinet—, obtenim el tríada de raó $7 : 5 : 3$ [4, p. 110, 234]. A la vegada, l'interval de dotzena, és a dir, la suma d'una octava i una quinta, resulta ser un bon interval en el quall basar aquesta nova escala, ja que la seva raó és $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}$ [16]. És interessant remarcar que recentment s'han començat a construir clarinets adaptats a aquesta escala; vegeu les contribucions de la clarinetista Nora-Louise Müller [17].

L'escala justa de Bohlen-Pierce

Així doncs, si considerem el tríada $7 : 5 : 3$ dins l'interval de tritava obtenim les notes de raó $1, 5 : 3, 7 : 3$ i $3 : 1$. A la vegada podem construir un altre tríada tal que la tercera nota d'aquest coincideixi amb la de la tritava. D'aquesta manera, obtenim les notes de raó $9 : 7$ i $15 : 7$, ja que $\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$ i $\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{7}$.

A la vegada, les notes de raó $5 : 3, 7 : 3$ i $3 : 1$ formen el tríada $9 : 7 : 5$ d'on obtenim dues notes més de raó $7 : 5$ i $9 : 5$. D'aquesta manera, anomenarem l'escala resultant **escala justa de Bohlen-Pierce**:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Raó	1	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	3
Pas		$\frac{9}{7}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{9}{7}$
Cents	0.000	435.084	582.512	884.359	1017.596	1319.443	1466.871	1901.955

Taula 3.17: Escala justa de Bohlen-Pierce pel cas $n = 7$

Observació 3.7. Notem que l'escala anterior compleix el principi d'equivalència, però per l'interval de tritava enlloc del d'octava.

Tal i com hem pogut veure a la taula, l'escala té quatre passos diferents: $\frac{27}{25}$, $\frac{49}{45}$, $\frac{25}{21}$ i $\frac{9}{7}$. És fàcil veure que el tercer tipus de pas és aproximadament el doble dels dos primers, respectivament, i que l'últim pas és de la forma $\frac{27}{25} \cdot \frac{25}{21} = \frac{9}{7}$. D'aquesta manera, la relació que s'estableix entre els quatre passos és aproximadament 1 : 2 : 3.

D'altra banda, la relació anterior també ens indica que si incorporéssim una nota a cada pas de mida $\frac{9}{7}$, tot mantenint una distància entre les notes veïnes equivalent a algun dels dos passos restants, obtindríem una escala en la que tots els seus passos satisfarien —aproximadament— la relació 1 : 2. Repetint un cop més aquest procés, podríem formar una espècie d'escala cromàtica de Bohlen-Pierce.

Per tal d'arribar a aquest resultat, fem totes les combinacions possibles entre les notes de l'escala justa de Bohlen-Pierce, i ens quedem amb les que ens proporcionen notes noves dins de l'àmbit de la tritava:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{25}, \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{21}, \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{15}{7} = \frac{75}{49}, \quad \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{25}, \quad \frac{7}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{63}{25}, \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9}.$$

D'aquesta manera, l'escala resultant també compleix el principi de l'equivalència de tritava i és de la forma [6]:

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó	1	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{75}{49}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{63}{25}$	$\frac{25}{9}$	3
Pas		$\frac{27}{25}$	$\frac{625}{567}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{375}{343}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{375}{343}$	$\frac{49}{45}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{625}{567}$	$\frac{27}{25}$

Taula 3.18: Escala de Bohlen-Pierce pel cas $n = 13$

L'escala de divisió igual de la tritava de Bohlen-Pierce

Fins ara hem vist el mètode per a construir l'escala de Bohlen-Pierce amb raons justes, però també és possible construir una versió de l'escala de divisió igual de la tritava amb fraccions contínues. En el llibre *Music: A Mathematical Offering*, Dave Benson proposa escollir la raó 7 : 3 com l'anàleg de la quinta en l'escala de Bohlen-Pierce, i que anomena **dècima BP**. El seu objectiu és seguir un raonament semblant al que havíem vist per la quinta justa de l'escala pitagòrica. Així doncs, hem de calcular l'expansió de la fracció contínua associada a $\log_3\left(\frac{7}{3}\right)$, que es correspon al nombre de tritaves al que equival una dècima BP [4, p. 234]:

$$\frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{4+} \frac{1}{22+} \frac{1}{32+} \dots$$

I que té per convergents:

$$0, 1, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{27}{35}, \frac{118}{153}, \dots$$

A continuació, repeteix el mateix procés per a la raó $5 : 3$, de manera que aproximem amb fraccions contínues el nombre $\log_3 \left(\frac{5}{3}\right)$ i obtenim el desenvolupament:

$$\frac{1}{2+} \frac{1}{6+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{3+} \frac{1}{7+} \dots$$

La qual genera els convergents:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{6}{13}, \frac{7}{15}, \frac{13}{28}, \frac{20}{43}, \frac{73}{157}, \dots$$

L'únic denominador comú en les dues seqüències de convergents és el 13, per tant, l'escala constarà de tretze notes distribuïdes uniformement en l'interval de tritava, i que anomenarem **escala 13–dit de Bohlen-Pierce**. En aquesta, la sisena nota a_5 aproximarà la raó $5 : 3$, mentre que la 10–èsima nota a_9 aproximarà la raó $7 : 3$, ja que hem pres els convergents $\frac{6}{13}$ i $\frac{10}{13}$, respectivament.

D'aquesta manera, l'escala constarà d'un únic pas de $\sqrt[13]{3}$ o, el que és el mateix, $\frac{1901.955}{13} = 146.304$ cents, i complirà el “principi de l'equivalència de tritaves”. Es pot observar l'escala 13–dit amb més detall a les taules B.16 i B.17.

3.3 Comparativa de les escales de fraccions contínues

En aquest capítol ens hem dedicat, fonamentalment, a estudiar diferents mètodes per aproximar l'escala justa a partir de la divisió igual d'un interval i l'ús de fraccions contínues. A continuació proporcionem una comparativa en cents de la divergència de cada una d'aquestes escales respecte els principals intervals de l'escala justa. La taula annexa posa de manifest que l'escala 19–dio és la que ofereix la millor aproximació per la tercera menor, però l'escala justa de Bohlen-Pierce proporciona el valor exacte de la sexta major. D'altra banda, l'escala γ és la que millor aproxima la tercera major i –juntament amb l'escala α – la quinta. Finalment, l'escala 53–dio proporciona la millor aproximació per la quarta i la 31–dio per la sexta menor; mentre que l'escala 13–dit no aproxima bé cap dels intervals estudiats.

	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$
12–dio	−15.641	+13.686	+1.955	−1.955	−13.687	+15.641
19–dio	+0.148	−7.367	+7.376	−7.218	+7.366	−0.148
31–dio	−5.964	+0.783	+5.181	−5.181	−0.784	+5.964
41–dio	6.3099	−5.8259	−0.4840	0.4840	5.8259	−6.3099
53–dio	1.3398	−1.4081	0.0682	−0.0682	1.4081	−1.3398
α	−3.641	+3.686	−30.045	−0.045	—	−6.423
β	+3.359	−3.514	+12.355	−0.155	+15.713	+8.841
γ	+0.259	−0.214	−6.645	−0.045	−6.387	−6.859
Justa BP	−13.794	—	—	—	—	0.000
13–dit	−23.033	—	—	—	—	−6.534
Millor aprox.	19–dio	γ	53–dio	α, γ	31–dio	Justa BP

Taula 3.19: Comparativa en cents de les aproximacions dels intervals justos principals.

Capítol 4

El teorema dels tres passos

Al segon capítol vam estudiar l'escala pitagòrica de dos passos pels casos $n = 7$ i $n = 12$ com a exemple d'escala generada, i vam poder constatar que la seva morfologia provocava que el procés de generació fos infinit. Tanmateix, una particularitat que no vam mencionar aleshores, és que el cardinal de l'escala influeix en el nombre de passos de la mateixa. En aquest capítol estudiarem aquest aspecte de les escales generades a partir del teorema dels tres passos, considerant la projecció al cercle $[0, 1)$.

4.1 El teorema dels tres passos

En el transcurs d'aquest capítol treballarem amb notació additiva, per aquest motiu:

Definició 4.1. Anomenarem **escala generada** de n notes a:

$$\Gamma(\theta, n) = \{\{k\theta\} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

on $\theta \in [0, 1)$ és un generador arbitrari i $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$.

Nota 4.1. Utilitzarem la notació $\{x\}$ per identificar la part decimal d'un nombre. Sigui $x \in \mathbb{R}$ i $\lfloor x \rfloor$ la seva part entera, aleshores $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

Prosseguim, doncs, a enunciar i demostrar el teorema dels tres passos:

Teorema 4.1. El nombre de passos diferents de l'escala generada $\Gamma(\theta, n)$ és 1, 2 o 3.

Demostració. Siguin x_1 i x_{n-1} la segona i última nota de l'escala generada en qüestió. Aleshores, $\exists a, b \in \{1, \dots, n-1\}$ tals que:

$$x_1 = \{a\theta\} = \min_{1 \leq k \leq n-1} \{k\theta\}$$

$$x_{n-1} = \{b\theta\} = \max_{1 \leq k \leq n-1} \{k\theta\}$$

Si considerem els casos per a $\{a\theta\} + \{b\theta\}$ en el cercle $[0, 1)$, tenim que:

$$\begin{cases} \{b\theta\} < \{(a+b)\theta\} \leq 1, & \text{si } \{(a+b)\theta\} = \{a\theta\} + \{b\theta\} \leq 1 \\ 0 \leq \{(a+b)\theta\} < \{a\theta\}, & \text{si } \{(a+b)\theta\} = \{a\theta\} + \{b\theta\} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Aquest últim perquè, si $\{a\theta\} + \{b\theta\} \geq 1$, aleshores $\{(a+b)\theta\} = \{a\theta\} + \{b\theta\} - 1$ i, per tant, $\{a\theta\} - \{(a+b)\theta\} = 1 - \{b\theta\} > 0$.

Així doncs, $\{(a+b)\theta\}$ es troba en l'arc del cercle esmentat, determinat per les notes x_{n-1} i x_1 . D'altra banda, per definició de x_1 i x_{n-1} , tenim que el primer i últim pas de l'escala definits per les parelles de notes x_0, x_1 i x_{n-1}, x_0 són, respectivament:

$$\alpha = \{a\theta\}$$

$$\beta = 1 - \{b\theta\}$$

Si ara calculem la mida del pas determinat per dues notes de l'escala qualssevol de la forma $\{r\theta\}, \{s\theta\}$ tal que $\{r\theta\} > \{s\theta\}$ amb $r, s \in \{1, \dots, n-1\}$, aleshores:

$$\{r\theta\} - \{s\theta\} = \begin{cases} \{(r-s)\theta\} \geq \min\{k\theta\} = \alpha, & \text{si } r > s \\ 1 - \{(s-r)\theta\} \geq 1 - \max\{k\theta\} = \beta, & \text{si } s > r \end{cases}$$

Per tant, si en el primer cas $\{(r-s)\theta\} = \alpha$, les notes $\{r\theta\}$ i $\{s\theta\}$ són consecutives. Vegem-ho:

Sigui $t \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\{r\theta\} > \{t\theta\} > \{s\theta\}$:

- Si $t > s$, tindríem que $\{t\theta\} - \{s\theta\} = \{(t-s)\theta\} \geq \alpha$, arribant a contradicció perquè $\{(r-s)\theta\} \geq \alpha$.
- Si $t < s$, aleshores $r > t$ tal que $\{(r-t)\theta\} \geq \alpha$, que també és impossible.

Seguint un raonament anàleg es demostra que si $1 - \{(s-r)\theta\} = \beta$, $\{s\theta\}$ i $\{r\theta\}$ són notes consecutives.

Per tant, l'escala estudiada té $n - a$ passos de mida α :

$$\{(r+a)\theta\} - \{r\theta\} = \alpha \quad \forall r = 0, 1, \dots, n-a-1$$

I $n - b$ passos de mida β :

$$1 - \{b\theta\}, \{(r-b)\theta\} - \{r\theta\} = \beta \quad \forall r = b+1, \dots, n-1$$

Tot seguit, prosseguim a determinar la mida dels $n - (n-a) - (n-b) = a + b - n$ passos restants.

És important remarcar que per definició de a i b , $\{(a+b)\theta\}$ no pot ser una nota de l'escala i, per tant, $a + b \geq n$. D'altra banda, si $n = a + b$, l'escala té exactament dos passos, α i β , sempre que aquests siguin diferents. Altrament, l'escala tindrà un sol pas.

Finalment, suposem que $a + b > n$ i vegem que els $n - (a + b)$ passos restants són de mida $\alpha + \beta$:

Tenim que cada un d'aquests passos comença a la nota $\{k\theta\}$, per a $k = n - a, n - a + 1, \dots, b - 1$, respectivament. Així doncs, hem de determinar les condicions per les quals la mida del pas $\{v\theta\} - \{k\theta\}$ amb $\{v\theta\} > \{k\theta\}$ tal que $v \in \{1, \dots, n - 1\}$ i $k \in \{n - a, n - a + 1, \dots, b - 1\}$ és mínima:

- Si $v > k$, tenim que $v - k < n - (n - a)$, i d'aquí es dedueix que:

$$\{(v - k)\theta\} = \{a\theta - (a - v + k)\theta\} = \{a\theta\} + 1 - \{(a - v + k)\theta\} \geq \alpha + \beta$$

De manera que es dona la igualtat si, i només si, $a - v + k = b \iff v = a + k - b$.

- I anàlogament pel cas $k > v$.

Per tant, si $k \in \{n - a, n - a + 1, \dots, b - 1\}$, les notes $\{(k + a - b)\theta\}$ i $\{k\theta\}$ són consecutives i determinen un pas de mida $\alpha + \beta$ [8]. \square

La demostració del teorema anterior ens permet provar fàcilment el següent resultat:

Corol·lari 4.1. Si θ és irracional, l'escala generada $\Gamma(\theta, n) = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}\}$ té exactament dos passos si, i només si, la següent nota generada $x_n = \{n\theta\}$ satisfà $x_n \in (x_{n-1}, 1)$, o bé, $x_n \in (0, x_1)$.

Demostració. Donades $x_1 = \{a\theta\}$ i $x_{n-1} = \{b\theta\}$, tenim que l'escala té exactament dos passos si, i només si, $n = a + b$, o en termes equivalents, es satisfan les desigualtats [8]:

$$\begin{cases} \{b\theta\} < \{(a + b)\theta\} \leq 1, & \text{si } \{(a + b)\theta\} = \{a\theta\} + \{b\theta\} \leq 1 \\ 0 \leq \{(a + b)\theta\} < \{a\theta\}, & \text{si } \{(a + b)\theta\} = \{a\theta\} + \{b\theta\} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

\square

D'altra banda, podem concretar encara més el resultat del teorema exposat, determinant per a quins valors de n l'escala generada $\Gamma(\theta, n)$ té dos passos diferents:

Teorema 4.2. Sigui $0 < \theta < 1$ un nombre irracional. L'escala generada $\Gamma(\theta, n)$ té exactament dos passos si, i només si, n és el denominador d'un semi-convergent $\frac{m}{n}$ de θ . En aquest cas també tindrem que la m -èsima nota $x_m = \theta$.

Provarem de manera recursiva que els m i n —pels quals l'escala satisfà les hipòtesis del teorema anterior— compleixen les equacions recurrents dels semi-convergens de θ , exposades en el **Teorema A.1**. En el transcurs de la demostració farem ús del següent resultat:

Lema 4.1. Donat un nombre irracional $0 < \theta < 1$ i el seu desenvolupament en fracció contínua $[0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. Aleshores, a_1 és el nombre de vegades que un interval de longitud $\theta_1 = \theta$ cap en l'interval $[0, 1]$ de longitud $\theta_0 = 1$, deixant com a residu un interval de longitud θ_2 , que a la vegada cap a_2 vegades dins l'interval de longitud θ_1 , amb un residu de longitud θ_3 , i així indefinidament per θ_k i a_k [12, p. 173-174].

El resultat anterior ens proporciona la següent recurrència, en la que és fàcil observar que $\theta_{i-2} \equiv \theta_i \pmod{\theta_{i-1}}$, per $i = 2, 3, \dots$:

$$a_1\theta_1 + \theta_2 = \theta_0$$

$$a_2\theta_2 + \theta_3 = \theta_1$$

$$a_3\theta_3 + \theta_4 = \theta_2$$

$$\dots$$

Demostració. Pel lema anterior tenim que els valors $m = 1$ i $n = 2, \dots, a_1 + 1$ determinen escales amb exactament dos passos. A més a més, $n = a_1$ és el denominador del primer convergent i $m = 1$ el respectiu numerador. Per tant, per a $n = a_1 + 1$ hi ha a_1 passos de longitud $\theta_1 = \theta$ i un de longitud $\theta_2 = \theta_0 - a_1\theta_1 = 1 - a_1\theta_1$.

Si ara generéssim una nota més, això seria equivalent a prendre $n = a_1 + 2$ i, per tant, a dividir en dues parts el pas entre les notes x_0 i $x_1 = \theta_1 = \theta$. Cada una d'aquestes parts tindria longitud θ_2 i $\theta_1 - \theta_2$, respectivament, obtenint així una escala de tres passos: θ_1, θ_2 i $\theta_1 - \theta_2$. Així doncs, necessitem generar a_1 notes més per obtenir una nova escala amb exactament dos passos, ja que dividirem tots els passos de longitud θ_1 en passos de longituds θ_2 i $\theta_1 - \theta_2$. Així doncs, $n = a_1 + 1 + a_1 = 2a_1 + 1$, de manera que $x_1 = \theta_1 - \theta_2$ i $m = 2$.

Tal i com hem vist amb el lema, l'interval de longitud θ_2 es pot encabir a_2 vegades dins de l'interval θ_1 . Com a conseqüència, les següents escales amb dos passos constaran de $n = 1 + ra_1$ notes amb $r = 2, \dots, a_2 + 1$, de manera que $x_r = \theta$. Observem que si $r = a_2$, aleshores obtenim el segon convergent, ja que:

$$p_2 = a_2$$

$$q_2 = 1 + a_1a_2$$

En canvi, si $r = a_2 + 1$ i, per tant, $m = 1 + a_2$ i $n = 1 + a_1(a_2 + 1) = a_1 + q_2$, l'escala constarà de $q_2 = 1 + a_1a_2$ passos de longitud θ_2 i $q_1 = a_1$ passos de longitud θ_3 , de manera que entre les notes x_0 i $x_m = \theta$ tindrem $p_2 = a_2$ passos de longitud θ_2 i $p_1 = 1$ passos de longitud θ_3 .

Anàlogament, si tornéssim a generar una altra nota, el pas de longitud θ_2 comprés entre les notes x_{n-1} i x_0 es tornaria a esmicolar en dues parts de longituds θ_3 i $\theta_2 - \theta_3$, respectivament, obtenint així una escala amb els passos θ_2, θ_3 i $\theta_2 - \theta_3$. Per tant, necessitarem $1 + a_1a_2$ passos més per dividir tots els passos en parts de longituds θ_3

i $\theta_2 - \theta_3$, per tal d'obtenir una escala que contingui exactament dos passos diferents. Un cop més, això és:

$$m = 1 + a_2 + a_2 = 1 + 2a_2$$

$$n = 1 + a_1(a_2 + 1) + 1 + a_1a_2 = 2 + a_1 + 2a_1a_2 = a_1 + 2(1 + a_1a_2)$$

Si seguim fent iteracions segons l'algorisme exposat, obtindrem $x_{n-1} = \theta_2 - a_3\theta_3$, per a $n = a_1 + (1 + a_1a_1)r$ i $m = 1 + a_2r$, on $r = 2, \dots, a_3 + 1$, de manera que tenim exactament dos passos diferents. Observem un cop més que per a $r = a_3$ tenim el tercer convergent, ja que:

$$p_3 = 1 + a_2a_3 = p_1 + p_2a_3$$

$$q_3 = a_1 + (1 + a_1a_2)a_3 = q_1 + q_2a_3$$

De manera que per a $r = a_3 + 1$ tenim q_3 passos de longitud θ_3 i q_2 passos de longitud θ_4 amb els valors:

$$m = 1 + a_2(a_3 + 1) = a_2 + (1 + a_2a_3) = p_2 + p_3$$

$$n = a_1 + (1 + a_1a_1)(a_3 + 1) = (1 + a_1a_2) + (a_1 + (1 + a_1a_2)a_3) = q_2 + q_3$$

Així doncs, entre les notes x_0 i x_m hi ha p_3 passos de longitud θ_3 i p_2 passos de longitud θ_4 . I seguint un raonament anàleg, els següents valors de n amb exactament dos intervals són $m = p_2 + p_3r$ i $n = q_2 + q_3r$ amb $r = 2, \dots, a_4 + 1$.

Per tant, hem vist que les escales generades amb exactament dos passos diferents seran de $n = q_{k-2} + q_{k-1}r$ notes amb $r = 1, \dots, a_k$, de manera que $m = p_{k-2} + p_{k-1}r$, tal i com volíem veure [8]. \square

Tanmateix, aquesta no és l'únic resultat concret que podem proporcionar. Si el generador θ és racional, l'escala pot contenir dos passos sense que el nombre de notes hagi de ser necessàriament el denominador d'un semi-convergent. Vegem-ho amb la següent proposició:

Teorema 4.3. Si $\Gamma(\theta, n)$ és una escala generada per un nombre racional $\theta = \frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_k]$, tal que $a_k > 1$ i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0; a_1, \dots, a_{k-1}]$ és el penúltim convergent de θ , llavors:

1. $\Gamma(\theta, n)$ té un únic pas si $n \geq q$.
2. $\Gamma(\theta, n)$ té dos passos diferents si n és el denominador d'un convergent o semi-convergent de θ ; o bé, si $q_{n-1} < n < q$.
3. Altrament, $\Gamma(\theta, n)$ té tres passos diferents.

Demostració. Si $n = q_{n-1}$, els passos de l'escala seran del tipus α i $\beta = 2\alpha$, de manera que totes les escales generades $\Gamma(\theta, n)$ amb $q_{n-1} < n < q$ contindran dos passos diferents. D'altra banda, si $n \geq q$, l'escala serà de la forma n -dio [8]. \square

4.2 El teorema dels tres passos aplicat a les escales generades

Un cop demostrats els principals resultats teòrics que ens aporten condicions per determinar, a priori, quina tipologia de passos tindrà una escala generada, prosseguim a veure els casos particulars de l'escala pitagòrica i l'escala generada a partir de la quinta mesotònica.

4.2.1 L'escala pitagòrica

Al capítol anterior vam obtenir per fraccions contínues que el generador irracional $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$ té per convergents:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}, \dots$$

Per tant, podem fitar θ mitjançant les desigualtats:

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{31}{53} < \frac{389}{665} < \dots < \theta < \dots < \frac{179}{306} < \frac{24}{41} < \frac{3}{5} < 1$$

D'aquesta manera, els denominadors 2, 5, 12, 41, 53, ... indiquen el nombre de notes que necessitem per octava per tal d'assolir la següent millor aproximació de la quinta justa en un temperament igual, és a dir, una escala n -dio. Aquesta aproximació la trobem indicada pel numerador del convergent. Per exemple, $\frac{7}{12}$ mostra que l'aproximació de la quinta justa en l'escala 12-dio es troba a $\frac{7}{12}$ d'octava, és a dir, a 700 cents de la nota de partida.

Per poder saber per quins cardinals l'escala pitagòrica té exactament dos passos hem d'aplicar el **Teorema 4.2**. Donat que els convergents dels primers termes de l'expansió ja els coneixem, només ens falta calcular els semi-convergens:

- $\frac{2}{3}$ és el semi-convergent de $\frac{3}{5}$:

$$\frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{5} < \frac{1 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} < \frac{0 \cdot 1 + 1}{0 \cdot 2 + 1} = 1$$

- $\frac{4}{7}$ és el semi-convergent de $\frac{7}{12}$:

$$\frac{0 \cdot 3 + 1}{0 \cdot 5 + 2} = \frac{1}{2} < \frac{1 \cdot 3 + 1}{1 \cdot 5 + 2} = \frac{4}{7} < \frac{2 \cdot 3 + 1}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{7}{12}$$

- $\frac{17}{29}$ i $\frac{10}{17}$ són els semi-convergens de $\frac{24}{41}$:

$$\frac{3 \cdot 7 + 3}{3 \cdot 12 + 5} = \frac{24}{41} < \frac{2 \cdot 7 + 3}{2 \cdot 12 + 5} = \frac{17}{29} < \frac{1 \cdot 7 + 3}{1 \cdot 12 + 5} = \frac{10}{17} < \frac{0 \cdot 7 + 3}{0 \cdot 12 + 5} = \frac{3}{5}$$

- $\frac{148}{253}$, $\frac{117}{200}$, $\frac{86}{147}$ i $\frac{55}{94}$ són els semi-convergens de $\frac{179}{306}$:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot 31 + 24}{5 \cdot 53 + 41} &= \frac{179}{306} < \frac{4 \cdot 31 + 24}{4 \cdot 53 + 41} = \frac{148}{253} < \frac{3 \cdot 31 + 24}{3 \cdot 53 + 41} = \frac{117}{200} < \\ &< \frac{2 \cdot 31 + 24}{2 \cdot 53 + 41} = \frac{86}{147} < \frac{1 \cdot 31 + 24}{1 \cdot 53 + 41} = \frac{55}{94} < \frac{0 \cdot 31 + 24}{0 \cdot 53 + 41} = \frac{24}{41} \end{aligned}$$

- $\frac{210}{359}$ és el semi-convergent de $\frac{389}{665}$:

$$\frac{0 \cdot 179 + 31}{0 \cdot 306 + 53} = \frac{31}{53} < \frac{1 \cdot 179 + 31}{1 \cdot 306 + 53} = \frac{210}{359} < \frac{2 \cdot 179 + 31}{2 \cdot 306 + 53} = \frac{389}{665}$$

Observació 4.1. Notem que els convergents de ls forma $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$ tenen $a_k - 1$ semi-convergents. Per tant, si $a_k = 1$, el k -èsim convergent no tindrà cap semi-convergent.

Així doncs, les escales $\Gamma(\theta, 3)$, $\Gamma(\theta, 5)$, $\Gamma(\theta, 7)$, $\Gamma(\theta, 12)$, $\Gamma(\theta, 17)$, $\Gamma(\theta, 29)$, $\Gamma(\theta, 41)$, $\Gamma(\theta, 53)$, $\Gamma(\theta, 94)$, $\Gamma(\theta, 147)$, $\Gamma(\theta, 200)$, $\Gamma(\theta, 253)$, $\Gamma(\theta, 306)$, $\Gamma(\theta, 359)$ i $\Gamma(\theta, 665)$ tenen totes exactament dos passos. A més a més, les notes $x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}, x_{17}, x_{24}, x_{31}, x_{55}, x_{86}, x_{117}, x_{148}, x_{179}, x_{210}$ i x_{389} de cada escala, respectivament, seran exactament θ . Això vol dir que un cop generades totes les notes de la respectiva escala, l'element generador apareixerà en la posició esmentada. Prosseguim, doncs, a estudiar la tipologia de passos de l'escala pitagòrica $\Gamma(\theta, n)$, per a $n = 2, 3, \dots, 12$.

Construïm totes les escales pitagòriques de n notes, amb $2 \leq n \leq 12$, i el primer que observem és que les úniques escales que consten exactament de dos passos són les associades als convergents $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ i $\frac{7}{12}$, i als semi-convergents $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{7}$, d'acord amb el resultat teòric del Teorema dels tres passos, i en particular, del **Teorema 4.2**. Per tant, les escales amb cardinals diferents de 2, 3, 5, 7 i 12 consten totes de 3 passos. També notem que no apareix cap escala amb un sol pas, ja que es tractaria d'una escala n -dio, les quals ja vam estudiar en el capítol anterior. La següent taula resumeix les dades essencials del procés:

n	convergent	# passos	passos		
2	$\frac{1}{2}$	2	0.415	0.585	
3	$\frac{2}{3}$	2	0.170	0.415	
4	—	3	0.170	0.245	0.415
5	$\frac{3}{5}$	2	0.170	0.245	
6	—	3	0.075	0.170	0.245
7	$\frac{4}{7}$	2	0.075	0.170	
8	—	3	0.075	0.095	0.170
9	—	3	0.075	0.095	0.170
10	—	3	0.075	0.095	0.170
11	—	3	0.075	0.095	0.170
12	$\frac{7}{12}$	2	0.075	0.095	

Taula 4.1: Comparativa de passos de $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 2, 3, \dots, 12$.

Per poder veure amb més detall les característiques de l'escala pitagòrica pels cardinals estudiats, es recomana consultar les taules C.1–10 de l'**Apèndix C**.

4.2.2 L'escala generada a partir de la quinta mesotònica

Una altra possible opció és estudiar quina morfologia de passos tindria una escala generada a partir de l'interval de quinta mesotònica de raó $\sqrt[4]{5}$.

Tal i com vam veure en el capítol anterior, hem d'aproximar el valor de $\frac{1}{4} \log_2 5$ amb fraccions contínues, de manera que obtenim que $\theta = [0; 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, \dots]$, amb els convergents associats:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{101}{174}, \dots$$

De manera que podem acotar el generador $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ mitjançant les desigualtats:

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{11}{19} < \frac{101}{174} < \dots < \theta < \dots < \frac{18}{31} < \frac{7}{12} < \frac{3}{5} < 1$$

Observació 4.2. Notem que aquí, $\frac{4}{7}$ apareix com a convergent, però en canvi, en el cas de l'escala pitagòrica era un semi-convergent.

Per poder aplicar el **Teorema 4.2**, calculem els semi-convergents i trobem que aquests són:

- $\frac{2}{3}$ és el semi-convergent de $\frac{3}{5}$:

$$\frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{5} < \frac{1 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} < \frac{0 \cdot 1 + 1}{0 \cdot 2 + 1} = 1$$

- $\frac{29}{50}, \frac{47}{81}, \frac{65}{112}$ i $\frac{83}{143}$ són els semi-convergents de $\frac{101}{174}$:

$$\begin{aligned} \frac{0 \cdot 18 + 11}{0 \cdot 31 + 19} = \frac{11}{19} &< \frac{1 \cdot 18 + 11}{1 \cdot 31 + 19} = \frac{29}{50} < \frac{2 \cdot 18 + 11}{2 \cdot 31 + 19} = \frac{47}{81} < \\ &< \frac{3 \cdot 18 + 11}{3 \cdot 31 + 19} = \frac{65}{112} < \frac{4 \cdot 18 + 11}{4 \cdot 31 + 19} = \frac{83}{143} < \frac{5 \cdot 18 + 11}{5 \cdot 31 + 19} = \frac{101}{174} \end{aligned}$$

Per tant, les escales $\Gamma(\theta, 2)$, $\Gamma(\theta, 3)$, $\Gamma(\theta, 5)$, $\Gamma(\theta, 7)$, $\Gamma(\theta, 12)$, $\Gamma(\theta, 19)$, $\Gamma(\theta, 31)$, $\Gamma(\theta, 50)$, $\Gamma(\theta, 81)$, $\Gamma(\theta, 112)$, $\Gamma(\theta, 143)$ i $\Gamma(\theta, 174)$ tenen exactament dos passos. I d'altra banda, el generador θ coincidirà amb les notes $x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{11}, x_{18}, x_{29}, x_{47}, x_{65}, x_{83}$ i x_{101} , respectives de cada escala.

Si estudiem la tipologia de passos de l'escala $\Gamma(\theta, n)$, per a $n = 2, 3, \dots, 12$, obtenim que:

n	convergent	# passos	passos		
2	$\frac{1}{2}$	2	0.420	0.580	
3	$\frac{2}{3}$	2	0.161	0.420	
4	—	3	0.161	0.259	0.420
5	$\frac{3}{5}$	2	0.161	0.259	
6	—	3	0.098	0.161	0.259
7	$\frac{4}{7}$	2	0.098	0.161	
8	—	3	0.063	0.098	0.161
9	—	3	0.063	0.098	0.161
10	—	3	0.063	0.098	0.161
11	—	3	0.063	0.098	0.161
12	$\frac{7}{12}$	2	0.063	0.098	

Taula 4.2: Comparativa de passos de $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2(5)$ i $n = 2, 3, \dots, 12$.

La taula anterior posa de manifest que, l'escala generada per la quinta mesotònica amb cardinal comprés entre 2 i 12, té exactament dos passos quan consta de 2, 3, 5, 7 i 12 notes, i tres, en cas contrari. Exactament igual que en l'apartat anterior, en què havíem generat l'escala pitagòrica a partir de la quinta justa. Per tant, a efectes pràctics, l'estructura de passos de les escales pitagòrica i mesotònica generada és el mateix per a $n \in \{2, 3, \dots, 12\}$.

Un cop més, notem que en aquest estudi no hem considerat les escales n -dio. Es poden consultar amb més detall les escales mesotòniques generades a les taules C.11–20.

Conclusions

El model teòric d'interval amb un grau elevat de consonància ve donat per freqüències que formen raons d'enters petits. Això dona lloc a una noció d'escala ideal, de la qual són exemples les escales justes. Tanmateix, les necessitats creatives de la música occidental requereixen poder usar intervals que són incompatibles amb les escales justes. En aquest treball hem fet un estudi matemàtic d'algunes solucions d'aquest problema que permeten tancar el cicle de quintes i, a la vegada, preservar algunes propietats de consonància.

Tot i que hem considerat possibilitats com els temperaments mesotònics i irregulars, les nostres investigacions s'han focalitzat, essencialment, en el mètode de dividir en parts iguals un determinat interval, el qual hem vist que distribueix l'error en l'interval seleccionat.

Gràcies a les nocions exposades en el segon capítol sobre mesura d'interval, hem pogut expressar un determinat interval en les unitats de l'interval que preteníem particionar i, posteriorment, l'hem aproximat amb fraccions contínues. Degut a les bones propietats de convergència d'aquestes, ens ha sigut relativament fàcil trobar les particions ideals que aproximaven l'interval desitjat, i un cop construïda l'escala, hem pogut comparar-ne les propietats. Més particularment, hem estudiat escales basades en divisions iguals de l'octava, així com alguns casos particulars de divisions iguals d'altres intervals: la quinta i la tritava.

En el primer cas, hem decidit aproximar, amb divisions iguals de l'octava, els intervals de quinta justa i quinta mesotònica, i hem estudiat algunes de les escales que millor aproximen aquests intervals, les escales 53-dio i 31-dio, respectivament. També hem aprofitat les bones propietats del temperament mesotònic per la tercera major, per provar que passaria si aproximéssim amb fraccions contínues la tercera mesotònica —*i.e.* justa— en lloc de la quinta. Gràcies a aquest experiment, hem obtingut la nova escala 28-dio, tot i que aquesta no és viable per a la praxi musical.

En el cas de la partició de la quinta, hem seguit un mètode anàleg a l'apartat anterior per construir les escales de Wendy Carlos, les quals també hem ampliat a l'àmbit d'octava, a partir d'afegir notes segons les propietats específiques de cada escala. En aquest procés, hem aproximat la tercera justa i hem pogut constatar que l'escala γ és la més precisa. A més a més, tan l'escala α com la γ milloren substancialment

l'aproximació de la quinta justa.

En l'últim apartat, hem dividit en parts iguals l'interval de tritava, dissenyat per Heinz Bohlen. Tot i que les escales que se'n deriven no són molt freqüents en l'àmbit musical, hem observat que es tracta d'una escala molt adient per instruments com el clarinet, ja que es fonamenta en les parcials senars de l'espectre harmònic.

Finalment, el teorema dels tres passos ens ha permès establir un vincle entre els convergents de l'expansió d'una fracció contínua i el nombre de passos d'una escala generada. A partir d'aquesta connexió hem pogut reprendre l'escala pitagòrica, i estudiar-la per casos, tot corroborant que, efectivament, té exactament dos passos si el cardinal coincideix amb el denominador d'un convergent o semi-convergent de la fracció contínua associada.

Seguint un procés similar, hem ideat una altra nova escala, utilitzant la quinta mesotònica com a element generador, i que també hem estudiat per casos en funció del nombre de notes d'aquesta. La comparativa amb l'escala pitagòrica ha permès demostrar que per a un n relativament petit, les dues escales tenen la mateixa estructura interna de passos, tot i que la mida d'aquests varia lleugerament.

Apèndix A

Fraccions contínues

La teoria de les fraccions contínues ens proporciona les eines necessàries per aproximar un nombre irracional a partir d'un nombre racional. A continuació exposem les nocions bàsiques sobre fraccions contínues que trobem als llibres *Number Theory in Science and Communication* de Manfred R. Schroeder i *An Introduction to the Theory of Numbers* de Godfrey H. Hardy i Edward M. Wright.

Definició A.1. Anomenarem **fracció contínua** una expressió del tipus

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

on $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{Z}$, i $a_i > 0$ per $i = 1, 2, \dots$. L'expressió anterior pot ser **finita** o **infinita**; en aquest cas l'entenem com un límit [22, p. 73-74].

Podem simplificar la notació de la fracció contínua escrivint-la com:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots$$

O mitjançant l'expressió sintètica:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

A l'hora d'aproximar un nombre real veurem que aquest té una única fracció contínua associada, la qual esdevé finita quan aquest és racional. Vegem-ho:

Sigui $x \in \mathbb{R}$ i $[x]$ la seva part entera; aquest és el major enter que compleix $[x] \leq x$. Aleshores, prenem $a_0 = [x]$ de manera que el residu $x - [x] \in [0, 1)$. Si la resta $x - [x] \neq 0$, invertim el nombre, de manera que es compleix $\frac{1}{x - [x]} > 1$.

D'aquesta manera, prenent $x_0 = x$, $a_0 = [x_0]$ i $x_1 = \frac{1}{x_0 - [x_0]}$ obtenim l'expressió $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$.

Seguint un procés anàleg, definim $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ i $x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor}$, i així:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}$$

Per inducció, determinem $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ i $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$ tal que:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Aquest algorisme és infinit si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, és a dir, si $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. En aquest cas, l'expansió de la fracció contínua obtinguda serà única. En canvi, si $x \in \mathbb{Q}$, l'algorisme conclou al proporcionar una fracció contínua finita, i tenim unicitat en cas que hàgim estipulat $a_n > 1$. En cas contrari, tindríem que $[a_0; a_1, \dots, a_n + 1] = [a_0; a_1, \dots, a_n, 1]$.

Exemple A.1. Prenem el nombre racional $\frac{45}{16} = 2.8125$. Seguint l'algorisme anterior, com que $\frac{13}{16} = 0.8125$ tenim que:

$$x_0 = x = 2.8125$$

$$a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor} = \frac{1}{0.8125} = \frac{16}{13}$$

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{13}}$$

D'aquesta manera, obtenim que:

$$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = \left\lfloor \frac{16}{13} \right\rfloor = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{0.230769231} = \frac{1}{\frac{3}{13}} = \frac{13}{3}$$

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{13}}$$

A la següent iteració,

$$a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 4$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - \lfloor x_2 \rfloor} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = 2 + \frac{1}{1 + 4 + \frac{1}{3}}$$

Finalment, $a_3 = \lfloor x_3 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$, i com que $x_3 - \lfloor x_3 \rfloor = 0$, l'expansió de la fracció contínua acaba aquí, i aquesta és:

$$\frac{45}{16} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}}} = [2; 1, 4, 3]$$

Exemple A.2. Prenem ara el nombre irracional π . Aplicant el mateix algorisme tenim:

$$\begin{aligned}x_0 &= x = 3.141592653\dots \\a_0 &= \lfloor x_0 \rfloor = 3 \\x_1 &= \frac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor} = \frac{1}{\pi - 3} = 7.062513086\dots\end{aligned}$$

Obtenint, d'aquesta manera, que:

$$\begin{aligned}a_1 &= \lfloor x_1 \rfloor = 7 \\x_2 &= \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor} = \frac{1}{x_1 - 7} = 15.996594406\dots\end{aligned}$$

Si seguíssim iterant l'algorisme, arribaríem a l'expansió infinita

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}}}}}}} \dots$$

Tanmateix, una fracció contínua infinita la podem truncar. D'aquesta manera obtenim la següent definició:

Definició A.2. Anomenarem **convergenents** a totes aquelles aproximacions racionals d'un nombre, obtingudes al truncar l'expansió d'una fracció contínua. D'aquesta manera direm que $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ és el k -èsim **convergent** de l'expansió $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. Els nombres $[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, j]$ amb $0 < j < a_k$ i $a_k > 1$, els anomenarem **semi-convergenents** [8].

Per calcular de forma eficient els convergenents, fem ús del següent teorema:

Teorema A.1. Siguin p_n, q_n dos nombres definits segons les expressions recursives:

$$\begin{aligned}p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & n &\geq 2 \\q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, & n &\geq 2\end{aligned}$$

Aleshores tenim que

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

Demostració. [12, p. 166-167] Ho demostrarem per inducció. És immediat veure que es compleix pels casos trivials, ja que per $n = 0$ i $n = 1$ obtenim, respectivament:

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{q_0} &= \frac{a_0}{1} = a_0 \\ \frac{p_1}{q_1} &= \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}\end{aligned}$$

Per provar la igualtat

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

utilitzarem la hipòtesi d'inducció pel cas $n - 1$. Això és:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}}{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}}$$

I obtenim que:

$$\frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

□

Exemple A.3. Si recuperem l'exemple anterior de π , podem calcular el segon i tercer convergent gràcies al teorema que acabem de provar.

Havíem vist que $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, \dots]$. Així doncs, $p_0 = a_0 = 3$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1 = 22$ i $q_1 = a_1 = 7$ i, per tant, obtenim que el **segon convergent** i el **tercer convergent** de π són, respectivament:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_0 + 15p_1}{q_0 + 15q_1} = \frac{333}{106}$$

A continuació substituïm els valors obtinguts de p_2 i q_2 i trobem que el **quart convergent** de π és:

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} = \frac{355}{113}$$

Si seguim aquest mètode, trobarem que els convergents de π són:

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots$$

És a dir,

$$3, \quad 3.142857143, \quad 3.141509434, \quad 3.141592920, \quad 3.141592653, \quad 3.141592654, \dots$$

Nota A.1. El segon convergent $\frac{22}{7}$ de π era conegut des de l'antiguitat.

Fins ara hem vist les possibilitats que ens ofereixen les fraccions contínues, però encara no hem estudiat com de bones són les seves aproximacions. Veiem-ho amb el següent teorema:

Teorema A.2. L'error de l' n -èsim convergent de l'expansió de la fracció contínua d'un nombre real x està fitat per [12, p. 176]:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Demostració. Com que $x \in \mathbb{R}$, aquest es troba entre dos nombres racionals, obviant el cas en què $x = \frac{p_n}{q_n}$ i, per tant, l'error és nul. Si $x > \frac{p_n}{q_n}$, aquest es trobarà entre els convergents $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Anàlogament, si $x < \frac{p_n}{q_n}$, aleshores es trobarà entre $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$.

Suposant $x > \frac{p_n}{q_n}$ tenim que:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$$

Aleshores, usant les equacions del **Teorema A.1** per a p_n i q_n , aquests els podem reescriure com:

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \\ \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}} = \frac{(a_n + 1)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + 1)q_{n-1} + q_{n-2}} \end{aligned}$$

I calculant la distància esmentada obtenim que aquesta és de la forma:

$$\left| \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{q_n(p_n + p_{n-1}) - p_n(q_n + q_{n-1})}{q_n(q_n + q_{n-1})} \right| = \left| \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n^2 + q_n q_{n-1}} \right|$$

Vegem ara que $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$. El cas base $n = 1$ es compleix, ja que $p_0 q_1 - p_1 q_0 = -1$, on $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ i $q_1 = a_1$. Això resulta en $a_0 a_1 - p_1 = -1$, que coincideix amb la fórmula tancada $p_1 = a_1 a_0 + 1$.

Per $n > 1$ tornem a utilitzar les equacions de p_n i q_n i trobem que:

$$\begin{aligned} p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} &= p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - q_{n-1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) = \\ &= p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) = \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^n \end{aligned}$$

D'aquesta manera,

$$d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) = \left| \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n^2 + q_n q_{n-1}} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n^2 + q_n q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{q_n}$$

I com que, el cas $x < \frac{p_n}{q_n}$ es demostra de forma anàloga, ja hem acabat [4, p. 219]. \square

Tot i que no el demostrarem, també és interessant tenir en compte el següent resultat:

Teorema A.3. Sigui x un nombre irracional amb l'expansió de fracció contínua $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ i els convergents de la forma $\frac{p_k}{q_k}$, tal que $1 \leq k \leq n$, $0 < q \leq q_n$ i $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ amb $p, q \in \mathbb{Z}$. Aleshores [9]:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|$$

És a dir, l' n -èsim convergent és la fracció amb denominador més petit o igual que q_n que proporciona la millor aproximació per a x . A més a més, tenim que els convergents de x satisfan:

$$\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \dots < x < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Finalment, observem que podem calcular els **semi-convergents** de l'expansió anterior mitjançant l'expressió $\frac{t p_{k-1} + p_{k-2}}{t q_{k-1} + q_{k-2}}$, amb $0 \leq t \leq a_k$ [21].

Apèndix B

Escales de fraccions contínues

En aquest apèndix es proporcionen amb detall les escales treballades en el tercer capítol, la majoria de les quals hem obtingut utilitzant fraccions contínues. Aquestes són l'escala simètrica de Harry Partch; la 19–dio, 28–dio, 31–dio, 41–dio i 53–dio; l' α , β i γ de Wendy Carlos; i la 13–dit de Bohlen-Pierce. A més a més, per a cada escala també s'adjunta una comparativa amb l'escala justa, per poder observar amb més detall quin error d'aproximació trobem en cada cas.

B.1 Escales de divisions iguals de l'octava

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0	$29 + \frac{11}{41}$	$58 + \frac{22}{41}$	$87 + \frac{33}{41}$	$117 + \frac{3}{41}$	$146 + \frac{14}{41}$
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	$175 + \frac{25}{41}$	$204 + \frac{36}{41}$	$234 + \frac{6}{41}$	$263 + \frac{17}{41}$	$292 + \frac{28}{41}$	$321 + \frac{39}{41}$
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	$351 + \frac{9}{41}$	$380 + \frac{20}{41}$	$409 + \frac{31}{41}$	$439 + \frac{1}{41}$	$468 + \frac{12}{41}$	$497 + \frac{23}{41}$
Nota	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Cents	$526 + \frac{34}{41}$	$556 + \frac{4}{41}$	$585 + \frac{15}{41}$	$614 + \frac{26}{41}$	$643 + \frac{37}{41}$	$673 + \frac{7}{41}$
Nota	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
Cents	$702 + \frac{18}{41}$	$731 + \frac{29}{41}$	$760 + \frac{40}{41}$	$790 + \frac{10}{41}$	$819 + \frac{21}{41}$	$848 + \frac{32}{41}$
Nota	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Cents	$878 + \frac{2}{41}$	$907 + \frac{13}{41}$	$936 + \frac{24}{41}$	$965 + \frac{35}{41}$	$995 + \frac{5}{41}$	$1024 + \frac{16}{41}$
Nota	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	
Cents	$1053 + \frac{27}{41}$	$1082 + \frac{38}{41}$	$1112 + \frac{8}{41}$	$1141 + \frac{19}{41}$	$1170 + \frac{30}{41}$	

Taula B.1: Escala 41–dio

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{56}{55}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{10}{9}$
Cents	0.000	-1.926	5.264	3.338	-2.370	-4.296	-6.794
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{13}{11}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{4}$
Cents	0.968	2.972	-3.456	3.473	6.310	3.812	-5.826
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
Raó justa	$\frac{14}{11}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{65}{48}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{7}{5}$
Cents	-7.752	3.940	-2.488	-0.484	1.943	4.780	2.854
Nota	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
Raó justa	$\frac{10}{7}$	$\frac{16}{11}$	$\frac{96}{65}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{32}{21}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{11}{7}$
Cents	-2.854	-4.780	-1.943	0.484	2.488	-3.940	7.752
Nota	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
Raó justa	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$
Cents	5.826	-3.812	-6.310	-3.473	3.456	-2.972	-0.968
Nota	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	
Raó justa	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{40}{21}$	$\frac{126}{65}$	$\frac{55}{28}$	
Cents	6.794	4.296	2.370	-3.338	-4.431	1.926	

Taula B.2: Aproximació a l'escala 41-dio mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0	$22 + \frac{34}{53}$	$45 + \frac{15}{53}$	$67 + \frac{49}{53}$	$90 + \frac{30}{53}$	$113 + \frac{11}{53}$
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	$135 + \frac{45}{53}$	$158 + \frac{26}{53}$	$181 + \frac{7}{53}$	$203 + \frac{41}{53}$	$226 + \frac{22}{53}$	$249 + \frac{3}{53}$
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	$271 + \frac{37}{53}$	$294 + \frac{18}{53}$	$316 + \frac{52}{53}$	$339 + \frac{33}{53}$	$362 + \frac{14}{53}$	$384 + \frac{48}{53}$
Nota	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Cents	$407 + \frac{29}{53}$	$430 + \frac{10}{53}$	$452 + \frac{44}{53}$	$475 + \frac{25}{53}$	$498 + \frac{6}{53}$	$520 + \frac{40}{53}$
Nota	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
Cents	$543 + \frac{21}{53}$	$566 + \frac{2}{53}$	$588 + \frac{36}{53}$	$611 + \frac{17}{53}$	$633 + \frac{51}{53}$	$656 + \frac{32}{53}$
Nota	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Cents	$679 + \frac{13}{53}$	$701 + \frac{47}{53}$	$724 + \frac{28}{53}$	$747 + \frac{9}{53}$	$769 + \frac{43}{53}$	$792 + \frac{24}{53}$
Nota	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}
Cents	$815 + \frac{5}{53}$	$837 + \frac{39}{53}$	$860 + \frac{20}{53}$	$883 + \frac{1}{53}$	$905 + \frac{35}{53}$	$928 + \frac{16}{53}$
Nota	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}
Cents	$950 + \frac{50}{53}$	$973 + \frac{31}{53}$	$996 + \frac{12}{53}$	$1018 + \frac{46}{53}$	$1041 + \frac{27}{53}$	$1064 + \frac{8}{53}$
Nota	a_{48}	a_{49}	a_{50}	a_{51}	a_{52}	
Cents	$1086 + \frac{42}{53}$	$1109 + \frac{23}{53}$	$1132 + \frac{4}{53}$	$1154 + \frac{38}{53}$	$1177 + \frac{19}{53}$	

Taula B.3: Escala 53–dio

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{66}{65}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{26}{25}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{13}{12}$
Cents	0.000	-3.790	-7.990	0.024	6.099	1.476	-2.724
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{11}{10}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{15}{13}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{13}{11}$
Cents	-6.514	-1.272	-0.136	-4.759	1.316	4.827	5.130
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
Raó justa	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{33}{26}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{13}{10}$
Cents	1.340	-7.785	2.792	-1.408	-5.198	-4.895	-1.384
Nota	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
Raó justa	$\frac{21}{16}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{35}{26}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{18}{13}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$
Cents	4.691	0.068	6.143	-7.922	2.655	6.167	-6.167
Nota	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
Raó justa	$\frac{13}{9}$	$\frac{16}{11}$	$\frac{52}{35}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{32}{21}$	$\frac{20}{13}$	$\frac{14}{9}$
Cents	-2.655	7.922	-6.143	-0.068	-4.691	1.384	4.895
Nota	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}
Raó justa	$\frac{52}{33}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{12}{7}$
Cents	5.198	1.408	-2.792	7.785	-1.340	-5.130	-4.827
Nota	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}
Raó justa	$\frac{26}{15}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{15}{8}$
Cents	-1.316	4.759	0.136	1.272	6.514	2.724	-1.476
Nota	a_{49}	a_{50}	a_{51}	a_{52}			
Raó justa	$\frac{40}{21}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{35}{18}$	$\frac{63}{32}$			
Cents	-6.099	-0.024	3.487	4.623			

Taula B.4: Aproximació a l'escala 53—dio mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0	$63 + \frac{3}{19}$	$126 + \frac{6}{19}$	$189 + \frac{9}{19}$	$252 + \frac{12}{19}$	$315 + \frac{15}{19}$
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	$378 + \frac{18}{19}$	$442 + \frac{2}{19}$	$505 + \frac{5}{19}$	$568 + \frac{8}{19}$	$631 + \frac{11}{19}$	$694 + \frac{14}{19}$
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	$757 + \frac{17}{19}$	$821 + \frac{1}{19}$	$884 + \frac{4}{19}$	$947 + \frac{7}{19}$	$1010 + \frac{10}{19}$	$1073 + \frac{13}{19}$
Nota	a_{18}					
Cents	$1136 + \frac{16}{19}$					

Taula B.5: Escala 19–dio

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{36}{35}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$
Cents	0.000	14.388	6.873	7.070	−14.239	0.148	−7.367
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{9}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{8}{5}$
Cents	7.021	7.376	−14.092	−14.091	−7.218	−7.021	7.366
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}		
Raó justa	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{35}{18}$		
Cents	−0.148	14.238	−7.070	−14.585	−14.388		

Taula B.6: Aproximació a l'escala 19–dio mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0	$38 + \frac{22}{31}$	$77 + \frac{13}{31}$	$116 + \frac{4}{31}$	$154 + \frac{26}{31}$	$193 + \frac{17}{31}$
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	$232 + \frac{8}{31}$	$270 + \frac{30}{31}$	$309 + \frac{21}{31}$	$348 + \frac{12}{31}$	$387 + \frac{3}{31}$	$425 + \frac{25}{31}$
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	$464 + \frac{16}{31}$	$503 + \frac{7}{31}$	$541 + \frac{29}{31}$	$580 + \frac{20}{31}$	$619 + \frac{11}{31}$	$658 + \frac{2}{31}$
Nota	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Cents	$696 + \frac{24}{31}$	$735 + \frac{15}{31}$	$774 + \frac{6}{31}$	$812 + \frac{28}{31}$	$851 + \frac{19}{31}$	$890 + \frac{10}{31}$
Nota	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
Cents	$929 + \frac{1}{31}$	$967 + \frac{23}{31}$	$1006 + \frac{14}{31}$	$1045 + \frac{5}{31}$	$1083 + \frac{27}{31}$	$1122 + \frac{18}{31}$
Nota	a_{30}					
Cents	$1161 + \frac{9}{31}$					

Taula B.7: Escala 31–dio

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{45}{44}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{35}{32}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{7}$
Cents	0.000	-0.196	6.746	4.398	-0.301	-10.362	1.084
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{21}{16}$	$\frac{4}{3}$
Cents	4.097	-5.964	0.979	0.783	-1.567	-6.265	5.181
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
Raó justa	$\frac{48}{35}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{35}{24}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{32}{21}$	$\frac{25}{16}$
Cents	-4.881	-1.868	1.867	4.880	-5.181	6.265	1.566
Nota	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
Raó justa	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{11}{6}$
Cents	-0.784	-0.979	5.964	-4.098	-1.084	10.361	-4.202
Nota	a_{28}	a_{29}	a_{30}				
Raó justa	$\frac{15}{8}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{63}{32}$				
Cents	-4.398	-6.747	-11.446				

Taula B.8: Aproximació a l'escala 31–dio mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0.000	42.857	85.714	128.571	171.429	214.286
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	257.143	300.000	342.857	385.714	428.571	471.429
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	514.286	557.143	600.000	642.857	685.714	728.571
Nota	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Cents	771.429	814.286	857.143	900.000	942.857	985.714
Nota	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}		
Cents	1028.571	1071.429	1114.286	1157.143		

Taula B.9: Escala 28–dio

B.2 Escales de Wendy Carlos i de Bohlen-Pierce

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0.000	78.000	156.000	234.000	312.000	390.000
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	468.000	546.000	624.000	702.000	780.000	858.000
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
Cents	936.000	1014.000	1092.000	1170.000	1248.000	

Taula B.10: Escala α de Wendy Carlos

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{21}{20}$	$\frac{35}{32}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{21}{16}$
Cents	0.000	-6.467	0.860	2.826	-3.641	3.686	-2.781
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{48}{35}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{63}{40}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{9}{5}$
Cents	-0.816	6.512	-0.045	-6.423	-26.359	2.870	-3.596
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}				
Raó justa	$\frac{15}{8}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{72}{35}$				
Cents	3.731	-2.736	-0.770				

Taula B.11: Aproximació a l'escala α de Wendy Carlos mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0.000	63.800	127.600	191.400	255.200	319.000
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	382.800	446.600	510.400	574.200	638.000	701.800
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	765.600	829.400	893.200	957.000	1020.800	1084.600
Nota	a_{18}	a_{19}				
Cents	1148.400	1212.200				

Taula B.12: Escala β de Wendy Carlos

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{36}{35}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$
Cents	0.000	15.030	8.157	-12.510	-11.671	3.359	-3.514
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{9}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{35}{24}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{8}{5}$
Cents	11.516	12.355	-8.313	-15.185	-0.155	0.684	+15.713
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	
Raó justa	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{35}{18}$	2	
Cents	8.841	-11.826	3.204	-3.669	-2.830	12.200	

Taula B.13: Aproximació a l'escala β de Wendy Carlos mitjançant les raons d'interval·ls justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0.000	35.100	70.200	105.300	140.400	175.500
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	210.600	245.700	280.800	315.900	351.000	386.100
Nota	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
Cents	421.200	456.300	491.400	526.500	561.600	596.700
Nota	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Cents	631.800	666.900	702.000	737.100	772.200	807.300
Nota	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
Cents	842.400	877.500	912.600	947.700	982.800	1017.900
Nota	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
Cents	1053.000	1088.100	1123.200	1158.300	1193.400	1228.500

Taula B.14: Escala γ de Wendy Carlos

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{64}{63}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$
Cents	0.000	7.836	-0.472	-6.431	7.162	-6.904	6.690
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{8}{7}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{21}{16}$
Cents	14.526	-13.335	0.259	3.592	-0.214	-6.173	-14.481
Nota	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}
Raó justa	$\frac{4}{3}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{3}{2}$
Cents	-6.645	6.948	-7.118	6.476	0.517	-13.549	-0.045
Nota	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}
Raó justa	$\frac{32}{21}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{12}{7}$
Cents	7.881	-0.428	-6.387	1.872	-6.859	6.735	14.570
Nota	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
Raó justa	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{35}{18}$	2
Cents	-13.291	-0.304	3.637	-0.169	-6.128	7.070	-6.600
Nota	a_{35}						
Raó justa	2						
Cents	28.500						

Taula B.15: Aproximació a l'escala γ de Wendy Carlos mitjançant les raons d'interval justos i diferència en cents.

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Cents	0.000	146.304	292.608	438.913	585.217	731.521
Nota	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Cents	877.825	1024.130	1170.434	1316.738	1463.042	1609.347
Nota	a_{12}	a_{13}				
Cents	1755.651	1901.955				

Taula B.16: Escala 13—dit de Bohlen-Pierce

Nota	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Raó justa	1	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{75}{49}$	$\frac{5}{3}$
Cents	0.000	13.000	−9.000	3.829	2.704	−5.000	−6.534
Nota	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Raó justa	$\frac{9}{5}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{63}{25}$	$\frac{25}{9}$	3
Cents	6.534	5.000	−2.000	−3.829	9.000	13.000	0.000

Taula B.17: Aproximació a l'escala 13—dit de Bohlen-Pierce mitjançant les raons d'interval·ls justos i diferència en cents.

Apèndix C

Escales generades per un interval

En aquest apèndix es proporcionen amb detall les escales generades a partir dels intervals de quinta pitagòrica i quinta mesotònica. Aquestes les hem obtingut en el quart capítol, quan hem aplicat alguns dels resultats teòrics del teorema dels tres passos.

C.1 Escales generades per la quinta justa

Nota	x_0	x_1		x_0	x_1	x_2
	0.000	0.585		0.000	0.170	0.585
Pas	$x_1 - x_0$	$1 - x_1$		$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$1 - x_2$
	0.585	0.415		0.170	0.415	0.415

Taula C.1: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 2, 3$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3
	0.000	0.170	0.585	0.755
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$1 - x_3$
	0.170	0.415	0.170	0.245

Taula C.2: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 4$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	0.000	0.170	0.340	0.585	0.755
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$1 - x_4$
	0.170	0.170	0.245	0.170	0.245

Taula C.3: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 5$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0.000	0.170	0.340	0.585	0.755	0.925
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$1 - x_5$
	0.170	0.170	0.245	0.170	0.170	0.075

Taula C.4: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 6$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.170	0.340	0.510	0.585	0.755	0.925
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$1 - x_6$
	0.170	0.170	0.170	0.075	0.170	0.170	0.075

Taula C.5: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 7$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0.000	0.095	0.170	0.340	0.510	0.585	0.755	0.925
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$	$1 - x_7$
	0.095	0.075	0.170	0.170	0.075	0.170	0.170	0.075

Taula C.6: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 8$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.095	0.170	0.340	0.510	0.585	0.680
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.095	0.075	0.170	0.170	0.075	0.095	0.075
Nota	x_7	x_8					
	0.755	0.925					
Pas	$x_8 - x_7$	$1 - x_8$					
	0.170	0.075					

Taula C.7: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 9$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.095	0.170	0.265	0.340	0.510	0.585
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.095	0.075	0.095	0.075	0.170	0.075	0.095
Nota	x_7	x_8	x_9				
	0.680	0.755	0.925				
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$1 - x_9$				
	0.075	0.170	0.075				

Taula C.8: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 10$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.095	0.170	0.265	0.340	0.510	0.585
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.095	0.075	0.095	0.075	0.170	0.075	0.095
Nota	x_7	x_8	x_9	x_{10}			
	0.680	0.755	0.850	0.925			
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$x_{10} - x_9$	$1 - x_{10}$			
	0.075	0.095	0.075	0.075			

Taula C.9: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 11$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.095	0.170	0.265	0.340	0.435	0.510
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.095	0.075	0.095	0.075	0.095	0.075	0.075
Nota	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
	0.585	0.680	0.755	0.850	0.925		
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$x_{10} - x_9$	$x_{11} - x_{10}$	$1 - x_{11}$		
	0.095	0.075	0.095	0.075	0.075		

Taula C.10: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ i $n = 12$.

C.2 Escales generades per la quinta mesotònica

Nota	x_0	x_1		x_0	x_1	x_2
	0.000	0.580		0.000	0.161	0.580
Pas	$x_1 - x_0$	$1 - x_1$		$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$1 - x_2$
	0.580	0.420		0.161	0.420	0.420

Taula C.11: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4}\log_2 5$ i $n = 2, 3$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3
	0.000	0.161	0.580	0.741
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$1 - x_3$
	0.161	0.420	0.161	0.259

Taula C.12: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 4$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	0.000	0.161	0.322	0.580	0.741
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$1 - x_4$
	0.161	0.161	0.259	0.161	0.259

Taula C.13: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 5$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0.000	0.161	0.322	0.580	0.741	0.902
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$1 - x_5$
	0.161	0.161	0.259	0.161	0.161	0.098

Taula C.14: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 6$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.161	0.322	0.483	0.580	0.741	0.902
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$1 - x_6$
	0.161	0.161	0.161	0.098	0.161	0.161	0.098

Taula C.15: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 7$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0.000	0.063	0.161	0.322	0.483	0.580	0.741	0.902
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$	$1 - x_7$
	0.063	0.098	0.161	0.161	0.098	0.161	0.161	0.098

Taula C.16: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 8$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.063	0.161	0.322	0.483	0.580	0.644
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.063	0.098	0.161	0.161	0.098	0.063	0.098
Nota	x_7	x_8					
	0.741	0.902					
Pas	$x_8 - x_7$	$1 - x_8$					
	0.161	0.098					

Taula C.17: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 9$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.063	0.161	0.224	0.322	0.483	0.580
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.063	0.098	0.063	0.098	0.161	0.098	0.063
Nota	x_7	x_8	x_9				
	0.644	0.741	0.902				
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$1 - x_9$				
	0.098	0.161	0.098				

Taula C.18: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 10$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.063	0.161	0.224	0.322	0.483	0.580
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.063	0.098	0.063	0.098	0.161	0.098	0.063
Nota	x_7	x_8	x_9	x_{10}			
	0.644	0.741	0.805	0.902			
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$x_{10} - x_9$	$1 - x_{10}$			
	0.098	0.063	0.098	0.098			

Taula C.19: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 11$.

Nota	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0.000	0.063	0.161	0.224	0.322	0.385	0.483
Pas	$x_1 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$	$x_5 - x_4$	$x_6 - x_5$	$x_7 - x_6$
	0.063	0.098	0.063	0.098	0.063	0.098	0.098
Nota	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
	0.580	0.644	0.741	0.805	0.902		
Pas	$x_8 - x_7$	$x_9 - x_8$	$x_{10} - x_9$	$x_{11} - x_{10}$	$1 - x_{11}$		
	0.063	0.098	0.063	0.098	0.098		

Taula C.20: Escala generada $\Gamma(\theta, n)$ amb $\theta = \frac{1}{4} \log_2 5$ i $n = 12$.

Bibliografia

- [1] J. Murray Barbour, *Tuning and Temperament: A Historical Survey*, Dover, New York, [1951] 2004.
- [2] Matthew Bartha, “Piano Tuning and Continued Fractions”, 2008, <<https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/bartha.pdf>>, consultat el (02.10.2015).
- [3] Arthur H. Benade, *Fundamentals of Musical Acoustics*, Dover, New York, [1976] 1990 (2nd ed.).
- [4] Dave Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [5] Neil Bibby, “Tuning and Temperament: Closing the Spiral”, dins John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson (ed.), *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*, p. 13-27, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [6] Heinz Bohlen, “13 Tonstufen in der Duodezime”, *Acustica*, vol.39, n.2, p. 75-86, 1978, <<http://www.huygens-fokker.org/bpsite/index.html>>, consultat el (27.09.2015).
- [7] Wendy Carlos, “Tuning: At the Crossroads”, *Computer Music Journal*, vol.11, n.1, p. 29-43, 1987.
- [8] Marco Castrillón, Manuel Domínguez, “Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales: Escalas bien formadas”, *La Gaceta de la RSME*, vol.16, n.1, p. 87-106, 2013.
- [9] Edward G. Dunne, “This note’s for you: A mathematical temperament”, 2000, <<http://oeis.org/DUNNE/TEMPERAMENT.HTML>>, consultat el (02.09.2015).
- [10] Edward G. Dunne, Mark McConnell, “Pianos and Continued Fractions”, *Mathematics Magazine*, vol.72, n.2, p. 104-115, 1999.
- [11] J. Javier Goldáraz Gaínza, *Afinación y Temperamentos Históricos*, Alianza Editorial, Madrid, 2004.

- [12] Godfrey H. Hardy, Edward M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, Oxford, [1938] 1980.
- [13] Hermann Helmholtz, *On the Sensations of Tone*, Dover, New York, [1885] 1954.
- [14] Michael Keith, *From Polychords to Pólya: Adventures in Musical Combinatorics*, Vinculum Press, Princeton, 1991.
- [15] Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music, vol.1*, MIT Press, Cambridge, 2007.
- [16] Max V. Mathews, John R. Pierce, “The Acquisition of Musical Percepts with a New Scale”, 1987, <<https://ccrma.stanford.edu/STANM/stanms/stanm40/stanm40.pdf>>, consultat el (15.09.2015).
- [17] Nora-Louise Müller, “The Bohlen-Pierce Clarinet. An Introduction to Acoustics and Playing Technique”, 2010, <<http://www.noralouisemuller.de/thirty-one.pdf>>, consultat el (08.10.2015).
- [18] John R. Pierce, *The Science of Musical Sound*, W. H. Freeman and Company, New York, [1983] 1992.
- [19] R. Plomp, Willem J. M. Levelt, “Tonal Consonance and Critical Bandwidth”, *J. Acoustic Soc. Am.*, vol.38, p. 548-560, 1965.
- [20] Thomas D. Rossing, F. Richard Moore and Paul A. Wheeler, *The Science of Sound*, Addison-Wesley, San Francisco, 1990.
- [21] Jordan Schettler, “Wendy’s Xenharmonic Keyboard”, 2012, <<http://math.ucsb.edu/jcs/Keyboard.pdf>>, consultat el (02.09.2015).
- [22] Manfred R. Schroeder, *Number Theory in Science and Communication*, Springer-Verlag, Berlin, 1997 (3rd ed.).
- [23] William A. Sethares, *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, Springer, London, 2004 (2nd ed.).
- [24] Bartel Leendert van der Waerden, *Science Awakening, vol.1*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, [1954] 1975.